Меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеу үшін төмендегі теоремаларды еске салайық:

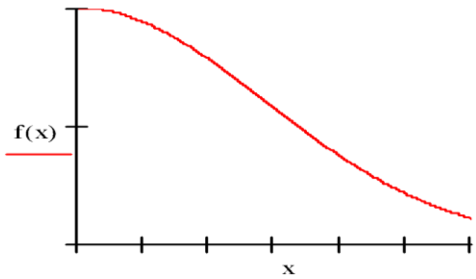
Теорема 1.1. (1-текті меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін Коши критерийі)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін Коши шартының, яғни

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta = \eta(\varepsilon))\ (a < \eta)\quad \left(\forall \eta < \eta', \quad \eta < \eta''\right): \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.
(дәлелдеуін [3], тарау 9, параграф 1 қараңыз **)**



Теорема 1.2. (1-салыстыру белгісі)

Айталық, $f(x)$ функциясы $a \le x < +\infty$ аралығында анықталған және $A \ge a$ шартын қанағаттандыратын $\forall A$ саны үшін $\int_a^A f(x)dx$ Риманның анықталған интегралы бар болсын. $a \le x < +\infty$ жарты түзуінде $|f(x)| \le g(x)$ теңсіздігі орындалсын және $g(x)$ интегралданатын функция болсын. Онда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралының жинақтылығынан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралының жинақтылығы шығады.
(дәлелдеуін [3], тарау 9, параграф 1 қараңыз **)**

Теорема 1.3. (2-салыстыру белгісі).
$f(x)$ функциясы $0 < a \le x < +\infty$ аралығында төмендегі теңсіздікті қанағаттандырса:

$$|f(x)| \le \frac{c}{x^{\lambda}} \quad \lambda > 1, \quad c, \lambda$$

- тұрақтылар,

онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болады. Егер $0 < a \le x < +\infty$ аралығында $f(x) \ge \frac{c}{x^{\lambda}}$ теңсіздігін қанағаттандыратын $c > 0$ табылса, мұнда $\lambda \le 1$, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақсыз болады.
(дәлелдеуін [3], тарау 9, параграф 1 қараңыз **)**

Теорема 1.4. Айталық, $f(x), \quad g(x)$ функциялары $a \le x < +\infty$ аралығында оң анықталған, $g(x) \ne 0, \quad a \le x < +\infty$ және

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$$

шектің мәні ақырлы болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралдарының жинақтылығы мен жинақсыздығы бірдей болады.
(дәлелдеуін [2], тарау 9, параграф 13 қараңыз **)**

Теорема 1.5. (Дирихле белгісі)

Айталық, $f(x): \quad [a;+\infty) \to \Re, \qquad g(x):[a;+\infty) \to \Re$ берілген.
1) $f(x)$ функциясы үзіліссіз және оның алғашқы функциясы $F(x)$ шектелген, $x \ge a$;
2) $g(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ аралығында монотонды;
3) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ болсын.

Осы шарттар орындалғанда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болады.
(дәлелдеуін [4], параграф 33, п.6 қараңыз **)**

Теорема 1.6. (Абель белгісі)
Айталық, $f(x): \quad [a;+\infty) \to \Re, \qquad g(x):[a;+\infty) \to \Re$ берілген.

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты;

2) $g(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ аралығында монотонды;

3) $g(x)$ шектелген, яғни $\exists K > 0 : |g(x)| \le K \qquad \forall x \in [a;+\infty)$.

Осы шарттар орындалғанда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болады.
(дәлелдеуін [4], параграф 33, п.6 қараңыз **)**

Ескерту 1. Екі интегралдың арасындағы ~ таңбасы теорема 1.4-ң көмегімен бұл интегралдардың жинақтылығы мен жинақсыздығы бірдей екенін білдіреді.

Ескерту 2. Егер интегралда ерекше нүктелердің саны ақырлы болса, онда берілген интегралды әр қосылғышта бір ғана ерекше нүкте қалатындай бірнеше интегралдардың қосындысы түрінде жазамыз.

Ескерту 3. Жинақты интегралдардың қосындысы әруақытта жинақты, жинақты интеграл мен жинақсыз интегралдың қосындысы әруақытта жинақсыз болады. Ал, жинақсыз интегралдардың қосындысы жинақталуы да мүмкін, жинақталмауы да мүмкін.

Мысал 3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Берілген интеграл астындағы функция $[1;+\infty)$ аралығында теріс анықталған. Бұл интегралдың және

$$\int_1^{+\infty}\left(-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right)dx$$

интегралдың жинақтылығы мен жинақсыздығы бірдей болады. Ал, соңғы интегралдың астындағы функция $[1;+\infty)$ аралығында оң анықталған.
$\ln\cos\frac{1}{x}$ функциясын Тейлор формуласымен жіктесек, төмендегі теңдікті аламыз:

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p} = -\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} = -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} - o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \qquad x\to+\infty$$

Осылайша,

$$-\int_0^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx \sim \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^{2+p}}dx, \qquad x\to+\infty$$

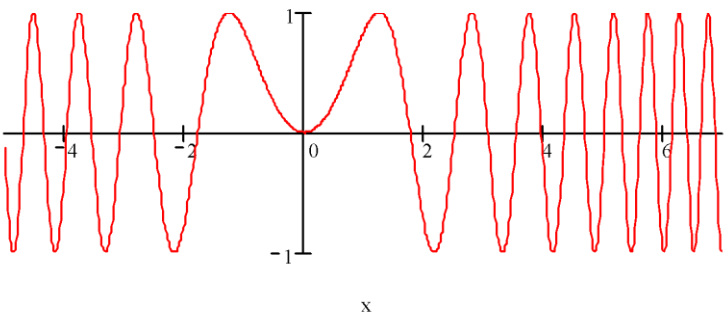
Сондықтан берілген интеграл 2-мысалдың қорытындысы бойынша $2+p>1$, яғни $p>-1$ болса жинақты, $p\le -1$ болса жинақсыз болады.

Мысал 4. Егер $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болса, онда $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$ орындалуы міндетті ме?

Шешуі. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін Коши шартының, яғни,

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\eta=\eta(\varepsilon))\ (a < \eta)\ \left(\forall\eta < \eta', \quad \eta < \eta''\right): \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

орындалуы қажетті және жеткілікті. Соңғы теңсіздіктен геометриялық мағынасы бойынша $x=\eta', \quad x=\eta'', \quad y=0, \quad y=f(x)$ қисықтармен шектелген фигураның ауданы 0-ге ұмтылатындығы шығады. Мысал үшін $y=\sin x^2$ функциясының графигін салайық:



Суреттен көргеніміздей, геометриялық мағынасы бойынша $x\to+\infty$ ұмтылғанда фигураның ауданы аз өзгереді. Себебі, графиктің Ox өсінен жоғары орналасқан бөлігі «+» таңбамен, төмен орналасқан бөлігі «-» таңбамен алынатындықтан және $x\to+\infty$ ұмтылғанда абсолют шамасы жуықтап бірдей болғандықтан, олар өзара жойыла береді. Енді Френель интегралын $\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$ қарастырайық. $x^2=t$ алмастыруын жасасақ,

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \begin{vmatrix} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

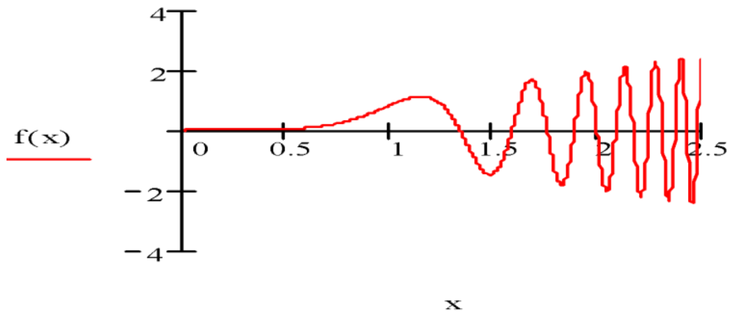
жинақты интегралды аламыз. Бұл интегралдың жинақтылығы дәл алдыңғы мысалдағыдай қарастырылады. Алайда, $1 \le x < +\infty$ аралығында интеграл астындағы функцияның шегінің $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x^2$ мәні табылмайды.
Енді

$$\int_1^{+\infty} x \sin x^4 dx$$

интегралын қарастырайық. Бұл интегралда да $x^2 = t$ алмастыруын жасасақ,

$$\int_1^{+\infty} x \sin x^4 dx = \left| x^2 = t \right| = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \sin t^2 dt$$

жинақты интегралын аламыз. $1 \le x < +\infty$ аралығында интеграл астындағы функцияның шегі $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin x^4 = \infty$. Демек, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралы жинақты болғанмен интеграл астындағы $f(x)$ функциясы шектелмеген болуы да мүмкін.
$f(x) = x \sin x^4$ функциясының графигі:



Мысал 5. Эйлер-Пуассон интегралын $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ жинақтылыққа зерттеңіз.

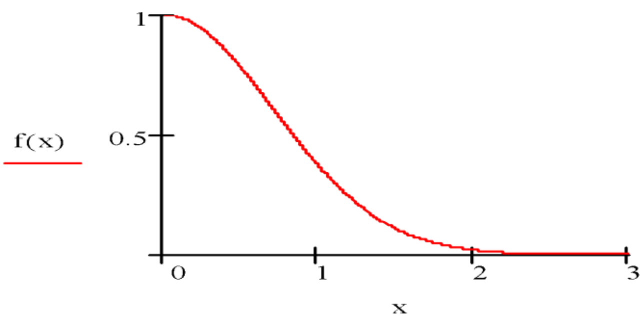
Шешуі. Бұл 1-текті меншіксіз интеграл. Берілген интегралды қосынды түрінде жазайық:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Оң жақтағы интегралдардың біріншісінде аралық- кесінді, функция шектелген. Екіншісін жинақтылыққа зерттейік. $\forall x \geq 1$ үшін $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ бағалауынан интеграл астындағы функцияның шектелгендігі шығады. Анықтама бойынша

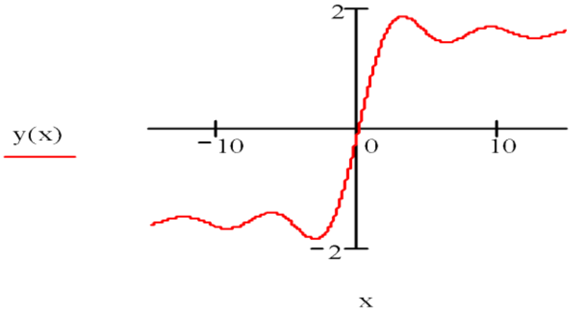
$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}+e^{-1}\right) = e^{-1}$$

Ендеше $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ интегралы жинақты. Олай болса, 1-салыстыру белгісі бойынша $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ интегралы да жинақты болады. Төменде $f(x) = e^{-x^2}$ функциясының графигі $[0;+\infty)$ аралығында келтірілген:



Мысал 6. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $Six = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$, $y = Six$ функциясын *интегралдық синус* деп атайды. $y = Six$ функциясының графигі:



$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ интегралдың жинақтылығын Дирихле белгісі бойынша зерттейік.

Мұнда $f(x)=1, \qquad g(x)=\frac{\sin x}{x}$ деп алсақ,

1) $|F(x)|=|x|$, алғашқы функция шектелмеген $\forall x \geq 1$ үшін ;

2) $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ монотонды емес $\forall x \geq 1$ үшін;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}=0$. Дирихле белгісінің 1), 2) шарттары орындалмайды.

Егер $g(x)=1, \qquad f(x)=\frac{\sin x}{x}$ деп алсақ,

1) $|F(x)|=\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx\right|$, алғашқы функция анықталмаған;

2) $g(x)=1$ монотонды кемімелі емес $\forall x \geq 1$ үшін;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$. Дирихле белгісінің 1), 2), 3) шарттары орындалмайды.

Егер $g(x)=\sin x, \qquad f(x)=\frac{1}{x}$ деп алсақ,

1) $|F(x)|=\ln x$, алғашқы функция шектелмеген;

2) $g(x)=\sin x$ монотонды кемімелі емес $\forall x \geq 1$ үшін;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ шегі табылмайды. Дирихле белгісінің 1), 2), 3) шарттары орындалмайды.

Енді $f(x)=\sin x, \qquad g(x)=\frac{1}{x}$ деп алайық. Сонда $\forall x \geq 1$ үшін

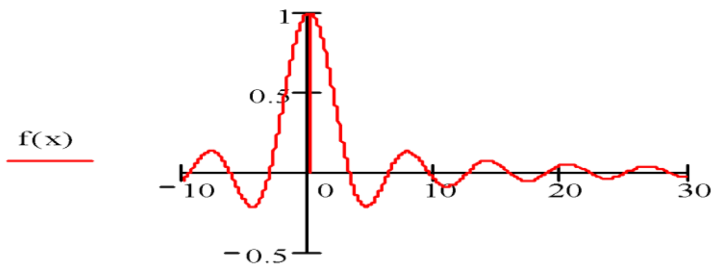
1) $|F(x)|=|-\cos x| \leq 1$, алғашқы функция шектелген;

2) $g(x)=\frac{1}{x}$ монотонды кемімелі $\forall x \geq 1$ үшін, себебі $g'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}=0$. Дирихле белгісінің 1), 2), 3) шарттары орындалады.

Олай болса, интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ жинақты.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциясының графигі:



Қорытынды. Интеграл астындағы функцияның құрамында $\sin x$ немесе $\cos x$ кездессе, жинақтылыққа зерттеу үшін Дирихле белгісін қолданып, $f(x)$ ретінде осы екеуінің біреуін таңдаған ыңғайлы.