§ 7. Абель алмастыруы

Квадрат иррационалдықтың тағы бір ерекше түрін қарастырамыз, дәлірек:

$$\frac{mx+n}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}, \quad k\in \mathrm{N}, \quad m,n,a,b,c\in\Re, \quad a\neq 0, \quad D=b^2-4ac\neq 0.$$

Бұл түрдегі функцияларды интегралдау үшін *Абель алмастыруын* қолданады.

Егер $m\neq 0$ болса, алымында $2ax+b=\left(ax^2+bx+c\right)'$ өрнегін бөліп аламыз да, интегралды төмендегі түрде жазамыз:

$$\int\frac{mx+n}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}dx=\frac{m}{2a}\int\frac{(ax+b)-b+\frac{2na}{m}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-k\right)\left(\left(ax^2+bx+c\right)^{k-\frac{1}{2}}\right)}+\left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

$\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}$ интегралын табу үшін мынадай алмастыру жасаймыз:

(1) $\quad t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ - осы *Абель алмастыруы.*

Бұл теңдіктен

$$t\sqrt{ax^2+bx+c}=ax+\frac{b}{2}.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$dt\sqrt{ax^2+bx+c}+t\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'dx=adx \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{ax^2+bx+c}\,dt+t^2dx=adx,$$

ендеше $\quad\left(a-t^2\right)dx=\sqrt{ax^2+bx+c}\,dt,$

бұдан $$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{dt}{\left(a-t^2\right)}. \qquad (2)$$

Екінші жағынан, (1) теңдіктің екі жағын да квадраттасақ:

$$t^2=\frac{a^2x^2+abx+\frac{b^2}{4}}{ax^2+bx+c}=a+\frac{\frac{b^2}{4}-ac}{ax^2+bx+c},$$

Сондықтан,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{t^2-a}{\frac{b^2}{4}-ac} \qquad (3)$$

(2) және (3) өрнектерді ізделінді интегралға қойсақ:

$$\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)^k}\int\frac{\left(t^2-a\right)^k dt}{a-t^2}=-\frac{1}{\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)^k}\int\left(t^2-a\right)^{k-1}dt$$

t-ға байланысты дәрежелік функцияның интегралын алдық. Ал, ол-кестелік.

Мысал 1. $\int\frac{(x+2)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=$

мұнда $k=3,\quad D=-12\neq 0,$

$$=\int\frac{(x+1)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{-5\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}}+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

Алынған интегралды Абель алмастыруымен табамыз:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=\left|\begin{array}{l} t=\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\frac{dt}{1-t^2} \\ \frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{t^2-1}{1-4}=\frac{1-t^2}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3^3}\int\frac{\left(1-t^2\right)^3}{1-t^2}dt=\frac{1}{27}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\frac{1}{27}\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right)+C=\frac{1}{27}\left(1-\frac{2}{3}t^2+\frac{t^4}{5}\right)+C,$$

мұнда $t=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. Қорытындысында

$$\int\frac{(x+2)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{-5\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x+1}{27\sqrt{x^2+2x+4}}\left(1-\frac{2}{3}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+4}+\frac{(x+1)^4}{5\left(x^2+2x+4\right)^2}\right)+C.$$

Мысал 2. Интегралды табыңыз $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx.$

Түбір астындағы өрнектен толық квадратты бөліп аламыз

$$2x-x^2=-\left(x^2-2x\right)=-\left(x^2-2x+1-1\right)=-\left((x-1)^2-1\right)=1-(x-1)^2$$

және $x-1=t,\ dx=dt$, деп алсақ:

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\begin{vmatrix}x-1=t,\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\begin{vmatrix}t=\sin z,\\ dt=\cos z\,dz\end{vmatrix}=$$

$$=\int\cos^2 z\,dz=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C=\left|z=\arcsin t\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}\right)+C=\left|t=x-1\right|=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x-1)+(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\right)+C.$$

§ 8. Дифференциалдық биномды интегралдау

Дифференциалдық бином деп келесі түрдегі өрнекті айтамыз:

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p$$

мұндағы $a,b\in R,\ \ m,n,p\in Q,$

П.Л.Чебышев теоремасы. Дифференциалдық биномның интегралы

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\quad \text{мұндағы } a,b\in R,\ \ m,n,p\in Q,$$

келесі үш жағдайда ғана сәйкес алмастырулар жасау арқылы рационал функциялармен өрнектеледі:

1). $p \in Z \Rightarrow x = t^N$, мұндағы N - m, n бөлшектерінің ортақ бөлімі;

2). $\frac{m+1}{n} \in Z \Rightarrow a + bx^n = t^N$, мұндағы N - p бөлшегінің бөлімі;

3). $\frac{m+1}{n} + p \in Z \Rightarrow \frac{a+bx^n}{x^n} = t^N$, мұндағы N - p бөлшегінің бөлімі;

Көрсетілген алмастыруларды қолданғанда дифференциалдық биномды $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ интегралдау t-ға байланысты рационал функцияны интегралдауға келеді.

Мысал 1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$

мұндағы $m = 1,\ n = \frac{2}{3},\ p = -\frac{1}{2} \notin Z,\ \frac{m+1}{n} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \in Z \Rightarrow$

бұл екінші жағдайға келеді, сондықтан алмастыруды келесі түрде жасаймыз:

$$= \left| \begin{array}{l} 1+x^{\frac{2}{3}} = t^2 \\ x = \left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}} \\ dx = \frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}} 2tdt \end{array} \right| = 3\int \frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} t}{t} dt = 3\int \left(t^2-1\right)^2 dt =$$

рационал функцияны интегралдауға келді, яғни

$$= 3\int \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C,$$

мұндағы $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

Мысал 2. $\int \sqrt{x^3 + x^4}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}} dx =$

анықталу облысы $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty);$

$x > 0$ жағдайы үшін интегралды табайық, мұнда

$m=\frac{3}{2},\ n=1,\ p=\frac{1}{2}\notin Z,\ \frac{m+1}{n}=\frac{5}{2}\notin Z,\ \frac{m+1}{n}+p\in Z\Rightarrow$

бұл үшінші жағдайға келеді, сәйкесінше айнымалыны алмастырамыз:

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{1+x}{x}=t^3\\ \frac{1}{x}=t^2-1\\ x=\frac{1}{t^2-1}\\ \quad dx=-\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2 dt}\end{array}\right|=-2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2}}dt=-2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}\,dt=$$

интеграл астындағы функция - дұрыс рационал бөлшек, бөлімінде 4 еселі ± 1

түбірлі сегізінші дәрежелі көпмүшелік, сондықтан бұл интегралды табу үшін М.В.Остроградский әдісін қолданамыз:

$$=-2\left(\frac{at^5+bt^4+ct^3+dt^2+et+k}{\left(t^2-1\right)^3}+\int\frac{mt+n}{t^2-1}dt\right)=$$

соңғы теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{\left(5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt+e\right)\left(t^2-1\right)-\left(at^5+...+k\right)3\cdot 2t}{\left(t^2-1\right)^4}+$$

$+\frac{mt+n}{t^2-1}=\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}$ теңдігін аламыз. Теңдіктің екі жағын да ортақ бөлімге келтіреміз де бөлшектің алымдарын теңестіреміз:

$$\left(5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt+e\right)\left(t^2-1\right)-$$

$$-6t\left(at^5+bt^4+ct^3+dt^2+et+k\right)+\left(mt+n\right)\left(t^6-3t^4+3t^2-1\right)=t^2$$

$$\begin{array}{l|l} t^7 & m=0 \\ t^6 & 5a-6a+m=0 \\ t^5 & 4b-6b=0 \\ t^4 & -5a+3c-6c-3n=0 \\ t^3 & 2d-6d=0 \\ t^2 & -3c+e-6e+3n=1 \\ t & -6k=0 \\ t^0 & -e-n=0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{16} \\ b=0 \\ c=-\frac{1}{6} \\ d=0 \\ e=-\frac{1}{16} \\ k=0 \\ m=0 \\ n=\frac{1}{16} \end{cases}$$

табылған мәндерді орнына қойсақ,

$$=-2\left(\frac{\frac{1}{16}t^5-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{16}t}{\left(t^2-1\right)^3}-\frac{1}{16}\int\frac{dt}{1-t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{3t+8t^3-3t^5}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{t-t^5}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

аламыз, t - ның орнына x- арқылы өрнектелуін қоямыз

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}:$$

$$=\frac{x^3}{8}\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{5}{2}}\right]+\frac{x^3}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{1-\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\right|+C=\frac{x^3}{8}\cdot\frac{\sqrt{x+x^2}}{x}\left(1-\left(\frac{1+x}{x}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+C=C+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}+$$

$$+\frac{x^2\sqrt{x+x^2}}{8}\cdot\frac{x^2-(x+1)^2}{x^2}+\frac{1}{16}\ln\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}-\frac{2x+1}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+C$$

$x>0$ болған жағдайда.

Бұл мысалда дұрыс рационал бөлшекті интегралдауды басқаша да табуға болады, ол үшін үш рет бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз:

$$-2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}dt=\left|\begin{matrix}u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^4}\\ du=dt & v=\dfrac{-1}{3\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)^3}=-\dfrac{1}{6\left(t^2-1\right)^3}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{t^2-1-t^2}{\left(t^2-1\right)^3}dt=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^3}=\left|\begin{matrix}u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^3}\\ du=dt & v=-\dfrac{1}{4\left(t^2-1\right)^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+\frac{t}{12\left(t^2-1\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{1-t^2+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\frac{t}{3\left(t^2-1\right)^3}+$$

$$\frac{1}{12\left(t^2-1\right)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}+\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \\ du=dt & v=-\dfrac{1}{2\left(t^2-1\right)}\end{matrix}\right| = \frac{t\left(t^2+3\right)}{12\left(t^2-1\right)^3}-\frac{t}{8\left(t^2-1\right)}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t}{24}\frac{2t^2+6-3\left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2-1\right)^3}+C=\frac{t}{24}\cdot\frac{3+8t^2-3t^4}{\left(t^2-1\right)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

дәл М.В.Остроградский әдісін қолданған жағдайдағыдай жауап алдық,

x- арқылы өрнектелуі белгілі:

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}-\frac{2x+1}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+C.$$

Мысал 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx=$

$x\ge 0;\quad m=\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{1}{3},\ p=-2\in Z\Rightarrow$

$x=t^6$

$6=ЕКОЕ(2;3):$

$$=\left|\begin{matrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=6\int\frac{t^{3+5}}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

интеграл астында - бұрыс рационал бөлшек, алдымен бүтін бөлігін бөліп аламыз, одан соң интегралдаймыз:

$$\begin{array}{l|l} -t^8 & t^4+2t^2+1 \\ \underline{\ t^8+2t^6+t^4\ } & \overline{t^4-2t^2+3} \\ -\,-2t^6-t^4 & \\ \quad \underline{-2t^6-4t^4-2t^2} & \\ \qquad -3t^4+2t^2 & \\ \qquad \underline{3t^4+6t^2+3} & \\ \qquad\quad -4t^2-3 & \end{array}$$

$$= 6\int\left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int\frac{dt}{t^2+1} - 6\int\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt =$$

соңғы интегралда бөліктеп интегралдаймыз, сосын 1) формуланы қолданамыз, сонда 10) формула бойынша:

$$= \left|\begin{matrix} u = t & dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2} \\ du = dt & v = -\dfrac{1}{2\left(t^2+1\right)} \end{matrix}\right| = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{t^2+1} -$$

$$-21arctgt + C = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21arctgx^{\frac{1}{6}} + C.$$