Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Сызықты емес теңдеулерді шешу әдістері

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Екіге бөлу әдісі.

2. Қиюшылар әдісі.

3. Риддер әдісі.

4. Есепті шығару үлгісі.

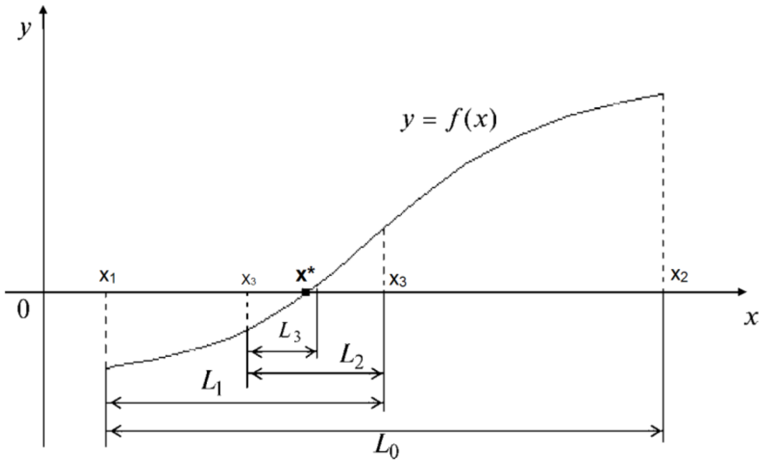
Мақсаты

Сызықты емес теңдеулерді шешу әдістерімен танысу

және есептеу алгоритмдерін құру.

Екіге бөлу әдісі

$f(x) = 0$ түбірі (x_1, x_2) аралықта жатса, екіге бөлу әдісі аралық жеткілікті аз болғанша екі есе қысқарту арқылы жүзеге асырады.



1-сурет. Екіге бөлу әдісінің сызбасы

Егер (x_1, x_2) аралықта түбір болса, онда $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ орындалады.

$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ интервалдың ортасы

Егер $f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$, онда түбір (x_3, x_2)

Егер $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$, онда түбір (x_1, x_3)

Екіге бөлу әдісі

Екіге бөлу интервал аз ε мәніне дейін азайғанша қайталанады, $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$.

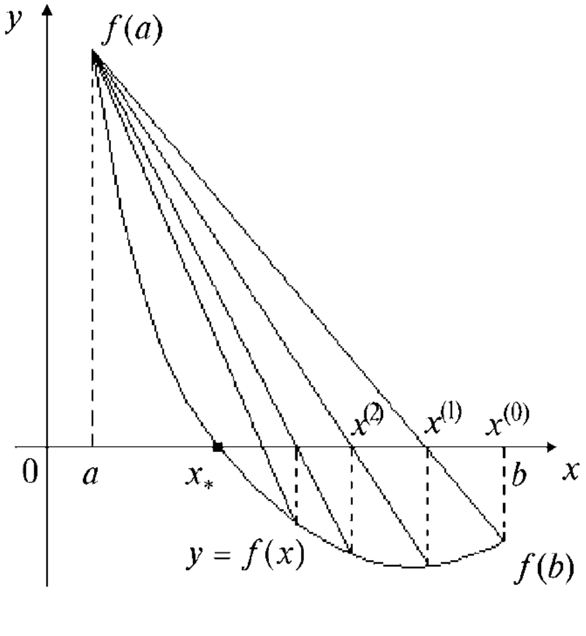
Итерация саны $n = \dfrac{\ln(|x_2 - x_1|/\varepsilon)}{\ln 2}$

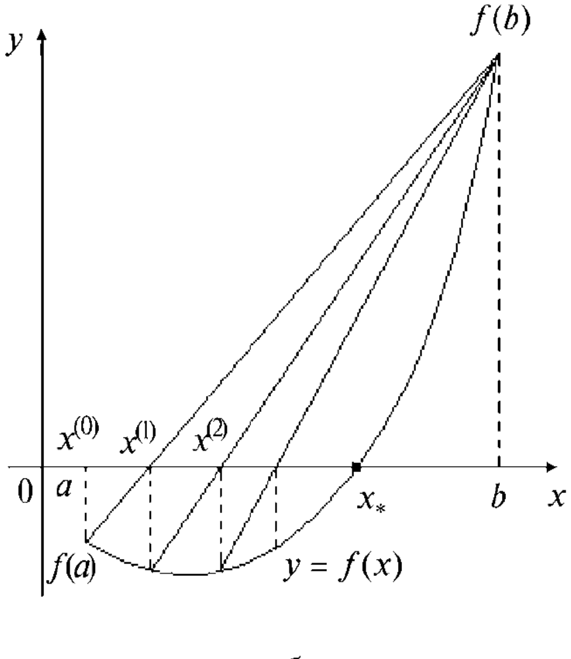
Bisection модулі

```
## module bisection
import math
from numpy import sign
def bisection(f,x1,x2,switch=1,tol=1.0e-9):
    f1 = f(x1)
    if f1 == 0.0: return x1
    f2 = f(x2)
    if f2 == 0.0: return x2
    if sign(f1) == sign(f2):
        print('Түбір жақшада жоқ')
n = int(math.ceil(math.log(abs(x2 - x1)/tol)/math.log(2.0)))
    for i in range(n):
        x3 = 0.5*(x1 + x2); f3 = f(x3)
        if (switch == 1) and (abs(f3) > abs(f1))
        and (abs(f3) > abs(f2)):
            return None
        if f3 == 0.0: return x3
        if sign(f2)!= sign(f3): x1 = x3; f1 = f3
        else: x2 = x3; f2 = f3
    return (x1 + x2)/2.0
```

Қиюшылар әдісі

$f(x) = 0$ түбірі (a, b) аралықта жатса, қиюшылар әдісі суперсызықты жинақталады.





2-сурет Қиюшылар әдісінің сызбасы

Қиюшы теңдеуі

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

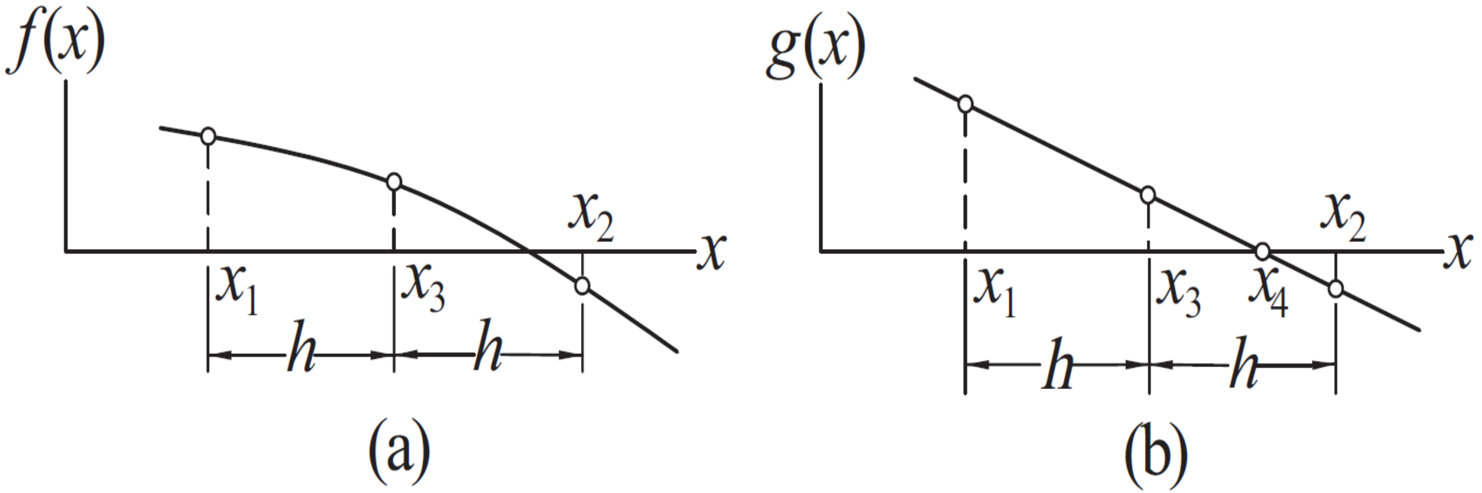
$y = 0$ деп ескеріп, итерациялық формула мынадай түрде жазылады

2а сурет бойынша	2б сурет бойынша
$x^{(0)} = b$ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f(x^{(k)}) - f(a)}\left(x^{(k)} - a\right)$	$x^{(0)} = a$ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f(b) - f(x^{(k)})}\left(b - x^{(k)}\right)$

Риддер әдісі

$f(x) = 0$ түбірі (x_1, x_2) аралығында. $f_3 = f(x_3)$ есептейміз, мұндағы x_3 - аралықтың ортасы.

$\boldsymbol{g(x) = f(x)e^{(x-x_1)Q}}$, мұндағы Q тұрақтысы $(x_1, g_1),\ (x_2, g_2)$ және (x_3, g_3) түзу сызықта жату керек.



3-сурет. Риддер әдісінің сызбасы

$$x_4 = x_3 \pm (x_3 - x_1)\frac{f_3}{\sqrt{f_3^2 - f_1 \cdot f_2}}$$

$f_1 - f_2 > 0$ болса, қосу таңбасы

$f_1 - f_2 < 0$ болса, минус таңбасы

Соңғы теңдеудегі Риддердің итерациялық формуласының **артықшылығы**:

егер x_1 және x_2 түбірді қамтыса, онда x_4 әрқашан (x_1, x_2) интервалында жатады.

Кемшілігі - әрбір итерацияда функцияны екі рет есептелінеді.

Риддер әдісі бойынша есеп шығару

$(0.6, 0.8)$ аралығында $x^3 - 10x^2 + 5 = 0$ түбірін табыңыз.

Шешуі.

x	0.6	0.8	0.7
f	1.6160	-0.8880	0.4430

Бірінші Итерация.

$$s = \sqrt{f_3^2 - f_1 \cdot f_2} = 1.2738$$

$$x_4 = 0.7 + (0.7 - 0.6)\frac{0.4430}{1.2738} = 0.7348 \qquad f_4 = -0.0026$$

Екінші Итерация.

$$x_3 = 0.5(0.7 + 0.7348) = 0.7174$$

$$f_3 = 0.2226 \qquad s = \sqrt{f_3^2 - f_1 \cdot f_2} = 0.2252$$

$$x_4 = 0.7174 + (0.7174 - 0.7)\frac{0.2226}{0.2252} = \mathbf{0.7346} \quad f_4 = 0.0$$

ridder модулі

```
## module ridder
import math
import error
from numpy import sign
def ridder(f,a,b,tol=1.0e-9):
    fa = f(a)
    if fa == 0.0: return a
    fb = f(b)
    if fb == 0.0: return b
    if sign(f2)!= sign(f3):
        x1 = x3; f1 = f3
for i in range(30):
    c = 0.5*(a + b); fc = f(c)
    s = math.sqrt(fc**2 - fa*fb)
    if s == 0.0: return None
    dx = (c - a)*fc/s
    if (fa - fb) < 0.0: dx = -dx
    x = c + dx; fx = f(x)
  # Жинақтылықты тексеру
    if i > 0:
        if abs(x - xOld) < tol*max(abs(x),1.0):
            return x
    xold = x
if sign(fc) == sign(fx):
    if sign(fa)!= sign(fx): b = x; fb = fx
    else: a = x; fa = fx
else:
    a = c; b = x; fa = fc; fb = fx
return None
```

Есепті шығару үлгісі

(0, 1) төрт таңбалы дәлдік аралығында орналасқан $x^3 - 10x^2 + 5 = 0$ түбірін табу үшін екіге бөлу әдісін пайдаланыңыз. Процедура неше рет функцияны есептейді?

Шешуі. Бағдарламасы:

```
from bisection import *
def f(x): return x**3 - 10.0*x**2 + 5.0
x = bisection(f, 0.0, 1.0, tol = 1.0e-4)
print('x =', '{:6.4f}'.format(x))
input("Press return to exit")
```

ε = 0,0001 (tol = 1,0e-4).

Нәтижесі

x = 0.7346

$$n = \frac{\ln(|x_2 - x_1|/\varepsilon)}{\ln 2} = \frac{\ln(1.0/0.0001)}{\ln 2} \approx 14$$

Қорытынды

1. Екіге бөлу әдісі алгоритмі.

2. Қиюшылар әдісінің формуласы.

3. Риддер әдісі.

4. Python тілінде теңдеуді шешу мысалы.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numericalmethods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.