

§3.4. Ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеулер

1. Фредгольм теңдеуі. Ақырлы $D \subset R^m$ облысында көп аргументті теңдеу қарастырайық:

$$\varphi(x) = \lambda \int_D K(x, s) \varphi(s) ds, \quad (38)$$

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq m, \quad H(x, s) \in C(D \times D). \quad (39)$$

(38) түріндегі теңдеуді ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеу, ал (39) түріндегі ядроны ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ядро деп атайды. Егер $\alpha < \frac{m}{2}$ болса, онда $K(x, s)$ Фредгольм ядросы деп аталады. Расында, $\alpha < \frac{m}{2}$ болған жағдайда

$$\int_D |K(x, s)|^2 ds = \frac{c^2 |S_1| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha} < \infty.$$

Мұндағы, S_1 болса R^m кеңістігіндегі радиусы бірге тең сфера бетінің ауданы, ал h болса D облысының диаметрі. $|H(x, s)| \leq c < \infty$ болғандықтан,

$$\int_D |K(x, s)|^2 ds \leq c^2 \int_D \frac{ds}{|x - s|^{2\alpha}} \leq c^2 \int_{|x-s| \leq h} \frac{ds}{|x - s|^{2\alpha}}$$

орынды. Бұл соңғы интегралда центрі x нүктесінде болатын сфералық координаталарға көшсек және $ds = r^{m+1} dr dS_1$ екенін ескерсек,

$$\int_D |K(x, s)|^2 ds \leq c^2 \int_{|x-s| \leq h} \frac{ds}{|x - s|^{2\alpha}} = c^2 \int_0^h \int_{S_1} \frac{r^{m-1}}{r^{2\alpha}} dr dS_1 = c^2 \frac{|S_1| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}.$$

1 лемма. Ерекшелігі әлсіз ядролы K интегралдық операторы $C(D)$ кеңістігін тағы да $C(D)$ -ға, ал $L_2(D)$ кеңістігін тағы да сол $L_2(D)$ кеңістігіне бейнелейді:

$$\|Kf\|_c \leq N \|f\|_c, \quad N = \max_{x \in D} \int_D |K(x, s)| ds,$$

$$\|Kf\|_{L_2} \leq \sqrt{NN^*} \|f\|_{L_2}, \quad N^* = \max_{s \in D} \int_D |K(x, s)| ds.$$

Дәлелдеуі. Алдымен

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x - s|^\alpha} \leq c_\alpha \delta^{n-\alpha}, \quad \forall x \in R^m \quad (40)$$

теңсіздігін дәлелдейік. Бұл теңсіздіктегі ω_δ радиусы δ болған шар. Расында, егер $|x| \geq 2\delta$ болса, онда $|x-s| \geq |x|-|s| > \delta$ теңсіздігі барлық $|s| \leq \delta$ мәндерінде орынды, сондықтан

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha} \int_{\omega_\delta} ds = \frac{1}{\delta^\alpha} \int_0^\delta dr \int_{S_1} r^{n-1} dS_1 = \frac{\delta^{n-\alpha}}{n} |S_1|.$$

Егер де $|x| \leq 2\delta$ болса, онда $|x-y| \leq |x|+|y| \leq 3\delta$ және

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \int_{\omega_{3\delta}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \frac{(3\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha} |S_1|,$$

демек, (40) теңсіздігі дәлелденді.

$f \in C(D)$ болсын. Ол кезде

$$(Kf)(x) = \int_D K(x,s) f(s) ds = \int_D \frac{H(x,s)}{|x-s|^2} f(s) ds$$

D облысында үзіліссіз функция болады. $\forall x_0 \in \overline{D}$ нүктесін бекітіп және $\forall \varepsilon > 0$ деп алайық. Сонда

$$|(Kf)(x) - (Kf)(x_0)| \leq c \int_{\omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds + c \int_{D \setminus \omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds.$$

Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші интеграл (40) теңсіздігіне байланысты $2CC_\alpha \delta^{n-\alpha}$ шамасынан үлкен бола алмайды, ендеше δ -ны жеткілікті дәрежеде кішірейтіп, бірінші интегралды $\frac{\varepsilon}{2}$ -ден кіші етуге болады. Ал екінші интеграл астындағы өрнектер $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ мен $|x_0-s| \geq \delta$ облыстарында (x,s) аргумент-тері бойынша бірқалыпты үзіліссіз, сондықтан барлық $x \in \omega_{\delta/2}(x_0)$ үшін ол интегралды әрқашан $\frac{\varepsilon}{2}$ -ден кіші етуге болады. Демек, барлық $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ үшін $|(Kf)(x) - (Kf)(x_0)| < \varepsilon$.

Бұл $\forall x_0 \in \overline{D}$ нүктесінде $(Kf)(x)$ -тің үзіліссіз екенін көрсетеді, яғни $Kf(x) \in C(\overline{D})$. Олай болса,

$$\|Kf\|_C = \max_x \int_D |K(x,s) f(s)| ds \leq \|f\|_C \max_x \int_D |K(x,s)| ds = N \|f\|_C$$

теңсіздігі орынды.

Енді $f \in L_2(D)$ болсын. Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned}\|Kf\|_{L_2}^2 &= \int_D |Kf|^2 ds = \int_D \left| \int_D K(x,s) f(s) ds \right|^2 dx \leq \int_D \left[\int_D \sqrt{|K(x,s)|} \cdot \sqrt{|K(x,s)|} \cdot |f(s)| ds \right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_D \left\{ \int_D |K(x,s)| ds \int_D |K(x,s)| \cdot |f|^2 ds \right\} dx \leq N \int_D \left(|f|^2 \int_D |K| dx \right) ds \leq NN^* \int_D |f|^2 ds = NN^* \|f\|_{L_2}^2.\end{aligned}$$

Бұл K операторының $L_2(D)$ кеңістігін $L_2(D)$ -ға бейнелейтінін көрсетеді.

Осы дәлелдеген лемманы және өткен параграфтағы тұжырымдарды пайдалансақ, ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің шектелген $\overline{D} \times \overline{D}$ облысында кез келген $f \in C(\overline{D})$ және $|\lambda| < \frac{1}{N}$ болғанда Нейман қатары түріндегі жалғыз шешімі бар болады, ол қатар $\overline{D}$ облысында бірқалыпты жинақты. Сонымен бірге жоғарыдағы ерекшелігі әлсіз (39) ядролы (38) интегралдық теңдеуін ядросы шектелген эквивалентті интегралдық теңдеумен ауыстырып шешуге болады.

Алдымен мына лемманы дәлелдейік.

2 лемма. Егер $K_i(x,s) = \frac{A_i}{|x-s|^{\alpha_i}}$, $\alpha_i < m$, $i=1,2$ болып және $D \subset R^m$ шектелген облыс болса, онда

$$K_3(x,s) = \int_D K_2(x,t) K_1(t,s) dt \quad (41)$$

полярилық ядро, оның үстіне

$$K_3(x,s) \leq \begin{cases} \frac{A_3}{|x-s|^{\alpha_1+\alpha_2-m}}, & \alpha_1 + \alpha_2 > m, \\ A_4 \ln|x-s| + A_5, & \alpha_1 + \alpha_2 = m, \\ \overline{D} \times \overline{D} \text{ облысында үзіліссіз}, & \alpha_1 + \alpha_2 < m \end{cases} \quad (42)$$

болады.

Дәлелдеуі. Егер $\alpha_1 + \alpha_2 < m$ болса, $\int_D K_2(x,t) K_1(t,s) dt$ интегралының кез келген $\forall x, s \in \overline{D}$ үшін бірқалыпты жинақты екені түсінікті, сондықтан $K_3(x,s)$ ядросы $\overline{D} \times \overline{D}$ облысында үзіліссіз. Лемманы толық дәлелдеу үшін $\alpha_1 + \alpha_2 \geq m$ болғанда (42) теңсіздігін дәлелдейік. (41) ядросын бағалау нәтижесінде

$$|K_3(x,t)| = A_1 A_2 \int_D \frac{dt}{(x-t)^{\alpha_2} (t-s)^{\alpha_1}}, \quad \forall x, s \in D$$

екенін аламыз. Бұл теңсіздікке $\eta = x - t$ ауыстыруын енгізіп, D облысын диаметрі h болған $\omega_h(x)$ шарына ауыстырсақ,

$$|K_3(x, s)| \leq A_1 A_2 \int_{\omega_h(x)} \frac{d\eta}{\eta^{\alpha_2} |x - s - \eta|^{\alpha_1}}.$$

Енді $|x - s| = r$ ($x - s = r \cdot \theta$, $|\theta| = 1$) белгілеулерін енгізіп және интегралдағы айнымалыларды $r = r\xi$, $d\eta = r^n d\xi$ етіп ауыстырсақ,

$$\begin{aligned} |K_3(x, s)| &\leq A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \int_{\omega_{h/2}(0)} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} = \\ &= A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \left(\int_{|\xi| \leq 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} + \int_{2 < |\xi| < \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \right). \end{aligned}$$

Бұл теңсіздіктің оң жағындағы бірінші интеграл $|\theta| = 1$ болғандықтан шектелген шама, яғни

$$\int_{|\xi| < 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \leq A_6,$$

ал $|\xi| \geq 2$ болған кезде $|\theta - \xi| \geq |\xi| - |\theta| = |\xi| - 1 \geq \frac{|\xi|}{2}$ екенін ескеріп, екінші интегралды бағаласақ,

$$\int_{2 \leq |\xi| \leq \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \leq 2^{\alpha_1} \int_{1 \leq |\xi| \leq \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1+\alpha_2}} = 2^{\alpha_1} |S_1| \int_1^{\frac{h}{2}} \rho^{m-1-\alpha_1-\alpha_2} dp \leq \begin{cases} 2^{\alpha_1} |S_1| \left[\frac{h}{2} - 1 \right], & \alpha_1 + \alpha_2 > m \\ 2^{\alpha_1} |S_1| \ln \left(\frac{h}{2} \right), & \alpha_1 + \alpha_2 = m. \end{cases}$$

Міне, осы соңғы теңсіздіктерден (42) өрнегінің орынды екені шығады.

Салдар. Егер ядро әлсіз ерекшелікті болса, оның қайталанған ядролары қайсыбір (екінші) нөмерінен бастап шектелген болады.

Расында, $K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq m$ ядросының n қайталанушы

ядросы, 2 лемма бойынша

$$|K_n(x, s)| \leq \begin{cases} \frac{C_n}{|x - s|^{n\alpha - (n-1)m}}, & n\alpha - (n-1)m > 0, \\ C_m, & n\alpha - (n-1)m < 0 \end{cases}$$

түрінде бағаланады, мұндағы, C_n шектелген тұрақты шама. Әрине, бұл өрнек шектелген (егер $n \geq \left\lceil \frac{m}{m-\alpha} \right\rceil$) болса. Барлық уақытта жоғарғы (39) түріндегі ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің ядросы қайталанған $K_2(x, s)$ немесе $K_3(x, s)$, $K_4(x, s)$ ядроларымен ауысқан сол типтегі теңдеулерге келтіруге болады. Ол үшін (38) теңдеуіндегі x -ті s -пен, ал s -ті t -мен ауыстырып, одан кейін теңдеуді $\lambda K(x, s)$ -ке көбейтіп, пайда болған өрнекті s бойынша интегралдап,

$$\lambda \int_D K(x, s) \varphi(s) ds = \lambda \int_D \left\{ \lambda \int_D K(s, t) \varphi(t) dt \right\} K(x, t) ds + \lambda \int_D f(s) K(x, s) ds$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуден және (38) теңдігінен

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_D K_2(x, s) \varphi(s) ds + f_2(x)$$

екені шығады, мұндағы,

$$f_2(x) = f(x) + \lambda \int_D K(x, s) f(s) ds.$$

Дәл осылай

$$\varphi(x) = \lambda^3 \int_D K(x, s) \varphi(s) ds + f_3(x),$$

ал мұнда,

$$f_3(x) = f_2(x) + \lambda \int_D K_2(x, s) f_2(s) ds,$$

міне, осылай жалғаса береді.

Бұл үдерісті шектелген санақты түрде қайталап, ядросы $K_n(x, s)$ шектелген, үзіліссіз болған Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуін аламыз. Демек, ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеуді регуляяры ядролы интегралдық теңдеуге келтірдік.