Лекция 5. Понятие функции. Определения предела функции в точке по Гейне и по Коши, эквивалентность этих определений. Односторонние пределы. Свойства функций, имеющих предел в точке

Понятие функции

Пусть X и Y – произвольные множества. Отображение множества X во множество Y называется функцией, заданной на X со значениями во множестве Y. Другими словами, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый единственный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция со значениями в Y. Обозначается $y = f(x), f : X \to Y$, или $x \to f(x)$.

Множество X называют областью определения функции f. Если $x \in X$, то $f(x)$ называют значением функции f в точке x. Множество всех значений функции f называется областью значений функции f. Область значений содержится во множестве Y, но не обязана совпадать с Y. Например, если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, то область ее значений $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ содержится в $\mathbb{R}$, но не совпадает с $\mathbb{R}$. Множество значений называют также образом множества X при отображении f и обозначают $f(X)$. Пусть $x \in X, y = f(x) \in Y$. Тогда y называют образом элемента x, а x - прообразом элемента y.

В определении функции множества X и Y произвольные. Так, последовательность также является функцией, определенной на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и действующая в $\mathbb{R}$. Это можно записать так: $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$. Другой пример получим, если взять в качестве X совокупность всех числовых последовательностей, а $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Тогда на X можно определить функцию следующим образом. Каждой последовательности $x \in X$ поставим в соответствие ее верхний предел, т.е. $y = f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, где $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\mathbb{R}^2$ - совокупность всех упорядоченных пар действительных чисел. Определим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, действующую по такому правилу $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Множество всех значений такой функции можно изобразить на плоскости в виде окружности с центром в начале координат радиуса 1. Другую функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ можно, например, определить равенством $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Мы определили функции, которые называют однозначными. Этим подчеркивается тот факт, что каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент из множества Y. Под функцией мы всегда будем понимать однозначную функцию, т.е. такую, что условие $f(x_1) \neq f(x_2)$ влечет $x_1 \neq x_2$. Обратная импликация справедлива не для каждой функции. Например, если $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, то $f(1) = f(-1) = 1$.

Определение 5.1 *Функция $f : X \to Y$ называется взаимно однозначной, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 \neq x_2$ вытекает $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Например, рассмотренная нами функция $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ не является взаимно однозначной. Если же рассмотреть другую функцию $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $f(x) = x^2$, то такая функция будет взаимно однозначной. Это вытекает из теоремы о существовании и единственности корня. Иначе говоря, взаимно однозначная функция - это такая функция, для которой у каждого образа существует единственный прообраз.

5.1 Эквивалентные множества

Пусть заданы два множества $-X$ и Y. Эти множества называются эквивалентными, если существует взаимно однозначная функция $f : X \to Y$, такая, что $f(X) = Y$. Говорят, что в этом случае между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначают это так: $X \sim Y$. Если $X \sim Y$, то множества X и Y называют равномощными. Отметим основные свойства равномощных множеств.

1. Из $X \sim Y$ следует $Y \sim X$ (симметричность).

2. Для любого множества X справедливо $X \sim X$ (рефлексивность).

3. Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).

Пример 1. Множества $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{2, 3, 4\}$ эквивалентны, т. к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по такому правилу: $f(x) = x + 1, x \in X$. Ясно, что такое соответствие не единственно.

Пример 2. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3\}$ не эквивалентны т.к. не может каждый элемент множества $\{2, 3\}$ иметь единственный прообраз во множестве $\{1, 2, 3\}$ при каком-либо отображении первого множества на второе, т.е. не существует взаимно однозначного отображения одного из этих множеств на другое.

Пример 3. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ эквивалентны. Взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ можно установить, например, по такому правилу: $1 \to 0, 2 \to 1, 3 \to -1, 4 \to 2, 5 \to -2$ и т. д.

Определения. *Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

1. *Множество A называется конечным, если оно эквивалентно некоторому K_n. Поскольку $K_n \nsim K_m$ при $n \neq m$, то натуральное число n в определении конечного множества определяется однозначно. Это число n называется количеством элементов во множестве A.*

2. *Непустое множество A называется бесконечным, если оно не эквивалентно никакому из K_n. Другими словами, непустое множество A бесконечно, если оно не является конечным.*

3. *Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbb{N}$.*

4. *Множество A называется несчетным, если A бесконечно и не является счетным.*

Если множество A счетно, то между его элементами и элементами множества $\mathbb{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, или, иначе говоря, все элементы множества A можно занумеровать, т.е. расположить в последовательность.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

$\square$ Доказательство. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел это - совокупность всех чисел вида $\dfrac{p}{q}$, где p - целое, а q - натуральное. Разместим все рациональные числа в виде матрицы, помещая в одну строку все несо кратимые дроби с фиксированным знаменателем:

$q=1:$	$\frac{0}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{1}$		$-\frac{1}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		
$q=2:$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		
$q=3:$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
		$\swarrow$		$\nearrow$				
$q=4:$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		
$q=5:$	$\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	$..$		$...$					$...$

Пример расположения всех чисел в последовательность указан в самой матрице. Этим самым установлено, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, и теорема доказана. $\blacksquare$

Другое доказательство. Занумеруем сначала множество $\mathbb{Q}^+$всех положительных рациональных чисел. Для этого каждое число $r \in \mathbb{Q}^+$ представим в виде $r = \dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ - несократимая дробь. Высотой числа r назовем $p+q$. Тогда, очевидно, для каждого натурального $n \geq 2$ существует лишь конечное число дробей высоты n. В самом деле, это будет множество чисел $\left\{\dfrac{1}{n-1}, \dfrac{2}{n-2}, \dfrac{3}{n-3}, \ldots, \dfrac{n-1}{1}\right\}$, из которого удалены все сократимые дроби. Теперь множество всех элементов из $\mathbb{Q}^+$легко расположить в последовательность следующим образом: сначала запишем все дроби высоты 2, затем все дроби высоты 3 и т.д. Получим последовательность $r_1, r_2, \ldots$, в которой содержатся все положительные рациональные числа. Теперь уже и все элементы множества $\mathbb{Q}$ можно расположить в последовательность, например, следующим образом: $0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots$

Итак, мы показали, что множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 2. *Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.*

$\square$ Доказательство. Достаточно показать, что отрезок $[0,\ 1]$ не является счетным. В самом деле, если бы множество $\mathbb{R}$ было бы счетным, то перебирая последовательно один за другим занумерованные элементы множества $\mathbb{R}$ и оставляя лишь те, которые содержатся в $[0,1]$, мы получили бы, что и $[0,1]$ счетен.

Итак, докажем, что $[0,1]$ несчетен. Предположим противное. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ - занумерованные все точки отрезка $[0,1]$. Разобьем $[0,1]$ на три отрезка равной длины и в качестве I_1 выберем тот из них, который не содержит x_1. Далее, разобьем I_1 на три равных по длине отрезка и выберем такой из них, который не содержит x_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков I_n длины $|I_n| = 3^{-n}$, таких, что I_n не содержит точек $x_1, \ldots, x_n$. По лемме Кантора, последовательность I_n имеет единственную общую точку x. Эта точка x не может совпасть с какой-либо точкой x_{n_0}. В самом деле, если $x = x_{n_0}$, то x не принадлежал бы I_{n_0}, а x принадлежит всем отрезкам I_n.

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следствие. *Множество всех иррациональных чисел несчетно.*

□ Доказательство. Если бы множество $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ оказалось счетным, то, объединяя его со счетным множеством $\mathbb{Q}$, мы получили бы, что и множество $\mathbb{R}$ счетно. ■

Итак, мы показали, что множество $\mathbb{R}$ существенно "богаче" , нежели $\mathbb{Q}$. Все элементы множества $\mathbb{R}$, в отличие от $\mathbb{Q}$, нельзя занумеровать. Вместе с тем каждый элемент множества $\mathbb{R}$ может быть представлен в виде предела последовательности элементов из $\mathbb{Q}$. Это свойство называется свойством плотности множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для каждого действительного числа x существует последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящаяся к x.*

□ Доказательство. Используем следствие из принципа Архимеда, согласно которому в каждом интервале (a, b) существует рациональное число r, т.е. такое, что $a < r < b$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем рациональное число r_1, такое, что $x < r_1 < x+1$. Для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ найдем рациональное число r_2, такое, что $x < r_2 < x + \dfrac{1}{2}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность рациональных чисел r_n, такую, что $x < r_n < x + \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. ■

Замечание. При доказательстве теоремы 3 мы построили последовательность рациональных чисел, сходящуюся к заданному действительному x, таких, что $r_n > x (n = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что числа r_n можно выбрать так, чтобы полученная последовательность $\{r_n\}$ была строго убывающей. Также легко можно построить строго возрастающую последовательность рациональных чисел, стремящуюся к заданному действительному числу x.

Предел функции и его элементарные свойства

Будем рассматривать функции $f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}$. Окрестностью радиуса $\delta > 0$ (или δ-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ мы называли множество таких $x \in \mathbb{R}$, что $a-\delta < x < a+\delta$, или, что то же самое, $|x - a| < \delta$. Проколотой δ-окрестностью точки a называем δ-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, из которой удалена сама точка a. Другими словами, проколотая δ окрестность точки a - это множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, таких, что $a - \delta < x < a$ или $a < x < a + \delta$. Это можно записать так: $0 < |x - a| < \delta$.

Определение предела функции по Коши.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение *Число A называется пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее, вообще говоря, от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если число A является пределом функции x в точке a, то говорят, что функция f стремится к A при x, стремящемся к a, и пишут: $\lim_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.*

Пример 1. Пусть $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $a = 0$. Данная функция определена в проколотой окрестности точки $a = 0$. Покажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x \neq 0$ неравенство

$$|f(x) - 0| = \left|x \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$$

справедливо, если только $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, где в качестве δ мы выбираем ε, т.е. $\delta = \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\delta = \varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 0| < \delta$, справедливо неравенство $\left|x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. По определению, это и означает, что $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Покажем, что функция f не имеет предела в точке $a = 0$, т.е. для любого $A \in \mathbb{R}$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$, найдется такое x, удовлетворяющее условию $0 < |x - 0| < \delta$, при котором $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

Пусть $A \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\varepsilon_0 = 1$ обладает требуемым свойством. В самом деле, зададим произвольное $\delta > 0$. Если $A \geq 0$, то выберем такое x, что $-\delta < x < 0$, например, $x = -\frac{\delta}{2}$. Тогда $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon_0$. Если же $A < 0$, то выберем такое x, что $0 < x < \delta$, например, $x = \frac{\delta}{2}$. Тогда снова получим, что $0 < |x - 0| < \delta$, и $|f(x) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon_0$. Итак, никакое $A \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $a = 0$.

Замечание 1. В определении предела мы предполагаем, что функция f определена в проколотой окрестности точки a. Может оказаться, что в самой точке a функция f также определена. Однако значение функции f в этой точке a совершенно не оказывает влияния на предел функции в этой точке, т. к. в определении предела мы рассматриваем лишь те значения x, которые отличны от a.

Пример 3. Пусть

$$f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Покажем, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и в качестве δ выберем любое положительное число, например, $\delta = 1$. Тогда из неравенства $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ вытекает

$|f(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$. Следует обратить внимание на то, что неравенство $|f(x)-1| < \varepsilon$ может и не выполняться при $x = 0$ (оно действительно не выполняется, если $\varepsilon \leq 1$). Но мы и не требуем, чтобы оно выполнялось при $x = 0$, т. к. рассматриваются лишь такие значения x, для которых $|x| > 0$.

Пример 4. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$. В самом деле, если $x \neq 1$, то $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$, и тогда $|f(x)-2| = |(x+1)-2| = |x-1| < \varepsilon$, если только $0 < |x-1| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

Замечание 2. Определение предела носит локальный характер. Это означает, что существование предела и его величина зависят лишь от значений, принимаемых функцией в достаточно малой проколотой окрестности точки a. Другими словами, если мы изменим функцию вне некоторой проколотой окрестности точки a, то это никак не скажется на существовании предела и его величине.

Пример 5. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при любом $a > 0$.
Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для $x > 0$ неравенство

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \varepsilon$$

будет иметь место, если только $0 < |x-a| < \sqrt{a}\cdot\varepsilon = \delta$.
Теорема 1 *(единственность предела). Если функция f имеет предел в точке a, то он единственный.*

$\square$ Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_1$ следует $|f(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, найдем $\delta_2 > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta_2$ следует $|f(x)-B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и выберем такое x, что $0 < |x-a| < \delta$. Тогда

$$|B-A| \leq |f(x)-A| + |f(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное и $|B-A| < \varepsilon$, то это означает, что $A = B$. $\blacksquare$

Локальная ограниченность функции, имеющей предел

Определение *Функция f называется ограниченной сверху (снизу) на множестве E, если существует такое число $M(m)$, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $f(x) \leq M(f(x) \geq m)$. Функция f называется ограниченной на множестве E, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу.*

Другое эквивалентное определение ограниченности функции можно дать, используя понятие модуля. Именно, функция f называется ограниченной на множестве E, если существует такое число A, что для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq A$.

Доказательство равносильности этих двух определений ограниченности элементарно и мы его опускаем.

Выше мы установили, что сходящаяся последовательность ограничена. Рассмотрим аналогичный вопрос для функций. Именно, следует ли из существования предела функции ее ограниченность? Отрицательный ответ на этот вопрос дает, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}, 0 < x < +\infty$. Действительно, легко видеть, что функция f неограничена на $(0, +\infty)$. В то же время $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$. В самом деле,

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{x} \leq 2|x-1| < \varepsilon$$

если только $|x-1| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Тем не менее, справедлива

Теорема 2. *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a и имеет предел в этой точке. Тогда существует такая проколотая окрестность $V \subset U$, на которой функция f ограничена.*

□ Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < 1$. Обозначим $V = U \cap \{x : 0 < |x-a| < \delta\}$. Тогда для всех $x \in V$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| \leq |A| + 1$, которое и означает, что функция f ограничена на V. ■

Определение предела функции по Гейне

Мы хотим связать определения предела функции и предела последовательности. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Возьмем произвольную последовательность аргументов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $x_n \in U$ $(x_n \neq a, n = 1, 2, \ldots)$. Эта последовательность аргументов порождает последовательность значений функции f в точках x_n, т.е. мы получаем последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение *Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Число A называется пределом функции f в точке a, если каждая последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящаяся к a (т.е. $x_n \in U, x_n \neq a, n = 1, 2, \ldots$), порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, стремящуюся к A.*

Итак, мы имеем два определения предела функции: по Коши и по Гейне. Покажем, что эти определения эквивалентны.

□ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ПРЕДЕЛА функции в точке.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле определения по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}, x_n \to a(n \to \infty), x_n \neq a$ и покажем, что $f(x_n) \to A(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пользуясь тем, что $x_n \to a(n \to \infty)$, для найденного δ найдем номер N, такой, что при каждом $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Но тогда при каждом $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обратно, пусть число A является пределом функции f при $x \to a$ в смысле Гейне, т.е. для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \to a, x_n \neq a)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A. Предположим, что A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое x, что $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta = 1$ и найдем такое x_1, что $0 < |x_1 - a| < 1$ и $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Далее, для $\delta = \dfrac{1}{2}$ найдем такое x_2, что $0 < |x_2 - a| < \dfrac{1}{2}$ и $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$. Полагая $\delta = \dfrac{1}{n}$, найдем такое x_n, что $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. В результате получим последовательность $\{x_n\}$. Из условия $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ следует, что $x_n \to a (n \to \infty)$, а поскольку $|x_n - a| > 0$, то $x_n \neq a (n = 1, 2, \ldots)$. Кроме того, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Это неравенство означает, что $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Окончательно, мы построили такую последовательность аргументов $\{x_n\}, x_n \to a, x_n \neq a$, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ не стремится к A. Это противоречит условию. ■

Итак, мы показали, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны. Часто на практике определение предела по Гейне используется для доказательства того, что у функции нет предела в точке a. Именно, отрицание определения предела в смысле Гейне выглядит следующим образом.

Определение *Число A не является пределом функции f в точке a, если существует последовательность аргументов $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такая, что $f(x_n)$ не стремится к A.*

Предположим, что найдется такая последовательность аргументов, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ расходится. Тогда ясно, что никакое число не является пределом функции f в точке a, т.е. f не имеет предела при $x \to a$. Итак, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела в точке a, достаточно построить последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, такую, что $\{f(x_n)\}$ не имеет предела.

Упражнение. Доказать, что справедливо и обратное утверждение. Именно, если функция f не имеет предела в точке a, то существует такая последовательность $\{x_n\}$ $(x_n \to a,\ x_n \neq a)$, что $\{f(x_n)\}$ расходится.

Пример. Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x} (x \neq 0)$. Выберем две последовательности $x'_k = \dfrac{1}{2\pi k}$ и $x''_k = \dfrac{1}{2\pi(k + 1/4)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $x'_k \to 0$, $x''_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $f(x'_k) = 0$, $f(x''_k) = 1$. Составим последовательность аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots$ Тогда соответствующая им последовательность значений функции будет иметь вид $0, 1, 0, 1, \ldots$, которая, очевидно, расходится. Итак, мы построили стремящуюся к нулю последовательность отличных от нуля аргументов, такую, что соответствующая последовательность значений функции не имеет предела. Значит, на основании определения предела функции, функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

не имеет предела при $x \to 0$.

Идея решения этого примера часто используется и при решении других задач. Именно, для того чтобы показать, что функция f не имеет предела при $x \to a$, достаточно построить две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, стремящиеся к $a\,(x'_n \neq a, x''_n \neq a)$, такие, что $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ сходятся к различным пределам (или хотя бы одна из них расходится). Тогда для последовательности аргументов $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots$ соответствующая последовательность значений функции $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots$ будет расходящейся, так как у нее есть два различных частичных предела (не выполнено условие критерия сходимости в терминах верхнего и нижнего пределов последовательности).

Теорема *(арифметические свойства пределов). Пусть функции fиg заданы в проколотой окрестности U точки* , $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Тогда*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
3. *если* $g(x) \neq 0 (x \in U)$ *и* $B \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

□ Доказательство. Эта теорема мгновенно может быть получена как следствие соответствующей теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей. Достаточно применить определение предела в смысле Гейне. ■

Теорема *(предельный переход и неравенства). Пусть функции f и g заданы в проколотой окрестности U точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $B > A$. Тогда найдется проколотая окрестность $\Delta \subset U$ точки a, такая, что $f(x) < g(x)$ для всех $x \in \Delta$.*

□ Доказательство. Зададим $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2} > 0$ и найдем такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta'$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Далее, найдем такое $\delta'' > 0$, что если только $0 < |x-a| < \delta''$, то $|g(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливы неравенства $f(x) < A + \varepsilon = \dfrac{A+B}{2} = B - \varepsilon < g(x)$, из которых следует, что $f(x) < g(x) (x \in \Delta = \{x : 0 < |x-a| < \delta\})$. ■

Следствие. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x, принадлежащих проколотой окрестности U точки а, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

Действительно, если предположить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то, в силу предыдущей теоремы, в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедливо неравенство $f(x) < g(x)$, что противоречит условию.

Теорема *(о трех пределах). Пусть функции f, g, h определены в проколотой окрестности U точки a и такие, что $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всех $x \in U$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно применить определение предела функции по Гейне и соответствующую теорему о трех пределах для последовательностей.

Односторонние и бесконечные пределы, пределы на бесконечности

Пусть функция f определена на интервале (a, b).

Определение *Число A называется пределом справа функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a+ \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывают следующим образом:* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ функции f слева в точке b.

Можно сформулировать эти определения в терминах последовательностей. Эквивалентность таких определений доказывается таким же образом, как и для обычных пределов. Например, число B называется пределом слева функции f в точке b, если любая последовательность $\{x_n\}$ точек из (a, b), стремящаяся к b, порождает соответствующую последовательность значений функции $\{f (x_n)\}$, стремящуюся к B.

Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Говорят, что предел функции f при x, стремящемся к a, равен $+\infty$ (или f стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к a), если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$. Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, если для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$. Если же для любого $E > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Ясно, что любое из условий $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ влечет $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Легко, однако, привести пример функции f, такой, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, но f не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Данные определения бесконечных пределов легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

Пусть функция f определена на полуоси $(a, +\infty)$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что для всех $x > \Delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Сформулируем еще некоторые определения с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta > 0 : \quad \forall x < -\Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\Delta > 0 : \quad \forall x : |x| > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$f(x) \to A + 0(x \to a - 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : a - \delta < x < a \quad A < f(x) < A + \varepsilon.$$

Как и в предыдущих случаях, подобные определения легко можно сформулировать в терминах последовательностей.

Пример 1. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. Действительно,

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

если только $|x|>\Delta=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Пример 2. Докажем, что функция $f(x)=\sin x$ не имеет предела при $x\to+\infty$. Для этого рассмотрим две последовательности: $x_n'=\pi n$ и $x_n''=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. Обе эти последовательности стремятся к $+\infty$, но при этом соответствующие последовательности значений функции $f\left(x_n'\right)=\sin\pi n=0\to0$ и $f\left(x_n''\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=1\to1$. Отсюда следует, что функция не имеет предела при $x\to+\infty$.

Пример 3. Если $f(x)=\operatorname{sign}x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sign}x=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sign}x=$ -1 . Однако f не имеет предела при $x\to\infty$. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть последовательности $x_n'=n$ и $x_n''=-n$.