Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.9(043) Қолжазба құқығында

АБДИМАНАПОВА ПЕРИЗАТ БАХЫТОВНА

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептер әулеті және оның қолданылуы

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер:

Физика-математика ғылымдарының докторы, доцент Темешева С.М.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Борисов Д.И.

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2024

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертацияда стандарттарға келесі сілтемелер қолданылды:

ҚР СОСЕ 5.04.034-2011. Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура.

Мемлекеттік стандарт 7.32-2001 (2006 жылғы өзгерістер). Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Ұсыну құрылымы мен ережелері.

Мемлекеттік стандарт 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар мен ережелер.

КӨМЕКШІ НӘТИЖЕЛЕР

Гронуолла-Беллман леммасы [110, 152 б.] *Айталық, $u(t)$ және $f(t)$– функциялары теріс емес, үзіліссіз, $t \geq t_0$ үшін*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau$$

теңсіздігін қанағаттандыратын функциялар болсын, мұндағы $c \geq 0$.

Онда $t \geq t_0$ үшін

$$u(t) \leq c \cdot exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau\right)$$

бағалауы орынды.

$L(X, Y)$ -сызықты шенелген операторлар кеңістігі.

Теорема [111, 135 б.] *Айталық, $A, B \in L(X, Y)$ болсын, A операторының үзіліссіз кері A^{-1} операторы бар болсын және*

$$\|(B - A)A^{-1}\| \leq 1$$

теңсіздігі орындалсын. Онда B операторының үзіліссіз B^{-1} кері операторы бар болады және

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|}$$

бағалауы орындалады.

Сызықтық емес оператор теңдеуін қарастырайық

$$F(x) = 0, x \in X,$$

мұндағы $F: X \to Y$ оператор және $S(x^0, \rho) = \{x \in X: \|x - x^0\|_1 < \rho\}$ шарында $F'(x)$ Фреше туындысы бар; X, Y– нормалары $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ болатын банах кеңістігі; $L(X, Y) - : X \to Y$ индукцияланған нормамен анықталатын сызықтық шенелген операторлар кеңістігі; $X = Y = R^n$ болған жағдайда, кейбір шарда $F(x) = 0$ теңдеуінің шешімі бар екендігі туралы келесі теорема Адамар теоремасының локалды нұсқасы ретінде белгілі.

Адамар теоремасы [106, 139 б.] $F: D \subset R^n \to R^n$ *функциясы D жиынында үзіліссіз дифференциалданатын және $x \in S, r > \gamma\|F(x_0)\|$ үшін*

$$\|(F'(x))^{-1}\| \leq \gamma$$

теңсіздігі орындалатындай $S(x^0, r)$ *ашық шар бар болсын. Онда S шарында*

$$F(x) = 0$$

теңдеуінің шешімі бар болады.

Сызықтық оператор қарастырылады

$$X(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j)d\tau_j \dots d\tau_2 d\tau_1,$$

мұндағы I– $(n \times n)$ өлшемді бірлік матрица.

Тұжырым [112 , 145 б.] $X(t)$ *операторы келесі*

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(t_0) = I, \qquad t \in R.$$

матрицалық Коши есебін қанағаттандырады. Оның $X^{-1}(t)$ *кері операторы бар және*

$$\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)A(t), \qquad X^{-1}(t_0) = I$$

матрицалық Коши есебін қанағаттандырады.

ҚОЛДАНЫЛАТЫН БЕЛГІЛЕУЛЕР

$C([0,\omega],R^n)$ – $d:[0,\omega]\to R^n$ үзіліссіз функциялар кеңістігі, нормасы $\|d\|_0=\max_{x\in[0,\omega]}\|d(x)\|$;

$C([0,\omega]\times[0,T],R^n)$ – $v:[0,\omega]\times[0,T]\to R^n$ үзіліссіз функциялар кеңістігі, нормасы $\|v\|_1=\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]}\|v(x,t)\|$;

$C([0,\omega],R^{n(N+1)})$ – $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_{N+1}(x))$ функциялар кеңістігі, нормасы $\|\lambda\|_3=\max_{r=\overline{1,N+1}}\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda_r(x)\|$, мұндағы $\lambda_r:[0,\omega]\to R^{n+1}$ барлық $r=\overline{1,N+1}$ үшін үзіліссіз;

$C([0,T],R^n)$ – $v:[0,T]\to R^n$ үзіліссіз функциялар кеңістігі, нормасы $\|v\|_4=\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|$;

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы

Диссертациялық жұмыс интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін және олардың қолданылуын зерттеуге арналған. Мұндай есептерді зерттемес бұрын жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептердің әулетін зерттеген жөн. Шеттік есептер өзгертілген алгоритммен параметрлеу әдісімен зерттеледі және шешіледі. Қарастырылып отырған есептердің шешімін табу алгоритмдері құрылды және олардың жинақталу шарттары алынды. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін зерттеу нәтижелері аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есептерді зерттеу және оның жуық шешімін табу үшін пайдаланылады. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің оқшауланған шешімінің болуы шарттарының нәтижесінде аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің бір класы үшін бейлокал шеттік есептің оқшауланған шешім бар болудың шарттары тұжырымдалады. Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсаты – аралас туындылы гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін бейлокал шеттік есептерді интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетіне келтіру арқылы зерттеу. Бұл зерттеу мыналарды қамтиды: параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмдерін құру, олардың жинақтылығының шарттарын алу; есептердің бастапқы деректерінің аз ауытқуларына «оқшауланған» шешімдердің үзіліссіз тәуелділік қасиетін анықтау; шешімін табудың жуық әдістерін құру.

Тақырыптың қазіргі жағдайы және өзектілігі.

Көптеген накты процестерді математикалық модельдеу дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді зерттеуге әкеледі. Шеттік есеп бейлокал деп аталады, егер қарастырылып отырған есептің ізделінді шешімін ерекшелейтін қосымша шарттар шекараның әртүрлі нүктелерінде, шекара нүктелерінде немесе облыстың кейбір ішкі нүктелерінде шешімнің және оның туындыларының мәндерін байланыстыратын қатынастар түрінде берілсе. Пулькина Л.С., Климова Е.Н. [35] еңбегінде атап өтілгендей, «...гиперболалық теңдеулер үшін бейлокал есептер соңғы уақытта белсенді түрде зерттелуде, бірақ негізінен тек сызықтық теңдеулер қарастырылады...». Сонымен, гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер теориясы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды салаларының бірі болып табылады. Мұның себебі, нәтижелердің теориялық маңыздылығымен қатар, оларды газ динамикасы, магниттік гидродинамика, математикалық биология және басқа салалардың модельдерін зерттеуде практикалық қолдану болып табылады. Диссертацияның ғылыми нәтижелері интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептердің әулетіне қатысты аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйелерінің бір класы үшін бейлокал шеттік есептерді зерттеудің тиімді құралы болып табылады.

Гиперболалық теңдеулер үшін әртүрлі есептерді және олардың шешімдерінің қасиеттерін Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви [1], Ж. Адамар [2], С. Л. Соболев [3], Ж. Лере [4], О. А. Ладыженская [5], Л. Гординг [6] және т. б. зерттеумен айналысты.

Физикалық, химиялық және басқа жүйелердегі тербеліс процестерді математикалық модельдеудегі көптеген қолданбалар гиперболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер арасында периодтық шарттары бар шеттік есептерді ерекше бөліп көрсетті.

Гиперболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді, оның ішінде периодтық шарттары бар есептерді Н.А. Артемьев [7], L. Cesari [8–10], Т.И. Кигурадзе [11–16], A.K. Aziz [17–19], V.Lakshmikantham [20], А.М. Самойленко, Б.П. Ткач [21], А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов [22], G. Hecquet [23, 24], O. Vejvoda, L. Herrmann, V. Lovicar [25], А.М. Нахушев [26] және т.б. қарастырған. Бұл жұмыстарда гиперболалық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді зерттеу және олардың жуық шешімдерін құру әдістері жасалды.

Гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептерді қолдану аясының кеңеюі және белгілі әдістер қолданылмайтын шеттік есептердің жаңа кластарының пайда болуы жаңа әдістердің туындауының қажеттілігіне әкеледі. Қолданбалы есептерді шешуде компьютерлік технологияны қолдану жасалып жатқан әдістерге белгілі талаптар қояды. Негізгі талап - олардың конструктивтілігі. Әдістің конструктивтілігі оның қолданылу шарттарының тиімді тексерілуінен және жоғары дәлдікпен қойылған есептің жуық шешімін табу мүмкіндігінен тұрады.

Конструктивтілік талаптарына жауап беретін отандық әдістердің бірі-жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есепті зерттеуге арналған Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісі [27]. Параметрлеу әдісінің мәні мынада: дифференциалдық теңдеу қарастырылатын аралықта кейбір $h > 0$ қадаммен бөлшектеулер орындалады және бастапқы есеп параметрлері бар эквивалентті есепке келтіріледі. Параметрлері бар есепті шешу параметр мен функция жұбы тізбектер жүйесінің шегі ретінде анықталады. Параметрлер шеттік шарттар матрицалары және дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы құрылған сызықтық теңдеулер жүйесінен табылады, ал функциялар ұзындықтары $h > 0$ аралықтарындағы осы параметрлерге сәйкес Коши есебінің шешімдері болады. Параметрлерді енгізу параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің жинақтылығын, сонымен бірге есептің шешімі бар болуын қамтамасыз ететін шарттарды, қарастырылап отырған есептің бастапқы деректер терминдерінде алуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі кластары үшін шеттік есептерді зерттеуде және шешуде кеңінен қолданылды [28-33]. Параметрлеу әдісін қолдану шеттік есептерді зерттеуге, есептің шешімін табу алгоритмдерін құруға, алгоритмдердің орындалуының шарттарын және есептің шешімінің бар болу критерийлерін (сызықтық есеп жағдайында шешімнің жалғыздығы, сызықтық емес есептер болған жағдайда оқшауланған шешім) анықтауға мүмкіндік береді.

Д.С. Джумабаев және С.М. Темешева еңбектерінде [28, 34] сызықтық емес жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептерді параметрлеу әдісін қолдана отырып зерттеу барысында келесі нәтижелер алынды: белгілі бір шарда «оқшауланған» шешім бар болудың критерийлері тағайындалды, операторлық теңдеудің шешімі ретінде бастапқы жуықтауды таңдау мәселесі шешілді, дифференциалдық теңдеудің оң жақ бөлігінің аз ауытқуларына және шеттік шарттар функциясына үзіліссіз тәуелділік шарттары анықталды. Параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің құрылымы шеттік есептердің шешімін табудың сандық және жуықтау әдістерін жасауға импульс бергенін атап өткен жөн [36-42].

Алғаш рет екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жалпы түрдегі бейлокал шарты бар есептер Д.С.Джумабаев пен А.Т. Асанованың жұмыстарында зерттелді [43-46]. Бейлокал шарт ізделінді функция мен оның бірінші ретті дербес туындыларының $t=0$ және $t=T$ характеристикаларындағы мәндерінің сызықтық комбинациясы түрінде ұсынылды. Дербес туындылы екінші ретті гиперболалық теңдеулер үшін параметрлеу әдісінің модификациясы жасалып, алгоритмдері тұрғызылды. Бейлокал есеп қарастырылатын облыс t айнымалысы бойынша бірдей h қадаммен N ішкі облыстарға бөлінді. Ізделінді функцияның бөлу сызықтарындағы мәндері ретінде фунционалдық параметрлер алынды. Бастапқы есеп ішкі облыстардағы Гурса есептеріне және параметрлерге қатысты бастапқы шарты бар дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтірілді. Шешілімділік шарттары бастапқы берілімдер бойынша құрылған көмекші функционалдық матрицаның қайтарымдылығы терминінде орнатылды [43-44]. Әрі қарай, жаңа функциялар енгізу арқылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есеп дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептер әулеті мен интегралдық қатынастарға келтірілді [45-48]. Бейлокал есептер және шеттік есептер әулетінің қисынды шешілімділігі арасындағы өзара байланыс орнатылды. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешілімділік шарттары параметрлеу әдісі арқылы анықталды және жуық шешімдерін табу алгоритмдері ұсынылды [47]. Нәтижелер сызықтық гиперболалық теңдеулер жүйесінің шектелген шешімдерін зерттеуге [49-51] және бейсызық гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есептерге дамытылды [52-53].

Гиперболалық теңдеулер үшін интегралдық шарты бар бейлокал есептер үшін қисынды шешілімділік критерийлері тағайындалып, шешу алгоритмдері құрылды [54]. Сонымен қатар, жүктелген гиперболалық теңдеулер үшін бейлокал есептердің қисынды шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары орнатылды, әрі жуық шешімді табу алгоритмдері ұсынылды [55].

Осы бағыттағы жұмыстар Джумабаевтың ғылыми мектебінің өкілдерінің еңбектерінде жалғасуда: гиперболалық теңдеулердің бірқатар кластары үшін бейлокал есептер зерттеліп, шешілімділік шарттары орнатылды, шешу алгоритмдері ұсынылып, жуықтау шешімдерін табу жолдары ұсынылды.

Ұсынылған диссертацияда аралас туындылы гиперболалық теңдеулердің бір класының жүйелері үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептерді интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетіне келтіру арқылы зерттелді. Дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді жуықтап шешу барысында әр түрлі есептеу қателіктері пайда болады. Дифференциалдық теңдеулердің оң жақтарының мәндерін және шеттік шарттар функцияларын жуықтап есептеудегі аз қателіктер есептің жуық шешімін анықтауда қажетсіз үлкен қателіктерге әкелуі мүмкін. Сондықтан, шешімнің есептің бастапқы деректеріне үзіліссіз тәуелділігі гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептердің оқшауланған шешімінің маңызды қасиеті болып табылады. Диссертацияда есептерді зерттеуде параметрлеу әдісін қолдану олардың «оқшауланған» шешімдерінің есептердің бастапқы деректерінің аз ауытқуларына үзіліссіз тәуелділік қасиетін анықтауды қамтамасыз етті.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін зерттеу және шешудің өзіндік мәні бар, ал оларды гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептердің шешімдерінің қасиеттерін анықтау және шешудің конструктивті әдістерін құру үшін қолдану диссертация тақырыбының өзектілігін көрсетеді.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер - соңғы уақытта математиканың қарқынды дамып келе жатқан бағытының бірі және ерекше көңіл бөлінуде.

Қазіргі уақытта әртүрлі салалардағы көптеген қолданбалы есептерді зерттеуде интегралдық-дифференциалдық модельдер кеңінен қолданылады: тұтқыр серпімділік теориясында, әртүрлі жүйелер мен құрылымдардың тұтқыр серпімді тербелістерін зерттеуде, полимер материалдарының механикасында, ядролық физика, биологиялық популяциялардың математикалық теориясында.

Әр түрлі физикалық құбылыстарды зерттеу интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге әкеледі. Он тоғызыншы ғасырда Томсон [56] қатты денеде әсер ету құбылысын зерттеу интегралдық-дифференциалдық теңдеуге әкелетінін көрсетті.

Жиырмасыншы ғасырдың басында Вольтерра [57,58] кейінгі әсер ету құбылысын ескере отырып, серпімді қатты дененің тепе-теңдігі туралы есепті интегралдық-ифференциалдық теңдеулерге келтірілетіндігін көрсетті.

Уақыт факторының әсерін ескере отырып, механикалық, электромагниттік, жылулық процестер және диэлектрлік, магниттік тұтқырлығы бар ортада электромагниттік толқындардың таралу процесі [59-61] еңбектерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулермен сипатталады.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер ядролық физикада да қолданылады [62-64], мысалы, стационарлық, жоғары энергиялық және изотропты тасымалдау процестерін зерттеу мәселелерінде. Атап айтқанда, мұндай процестерге сәулелену энергиясының берілуі және нейтрондардың диффузия құбылыстары жатады.

Мысал ретінде, біз интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді саңылаулы антенналарды зерттеуге [65,66], кеменің тыныш суда тербелуін [67], ығысу жағдайында күшейтуді ескере отырып, тұтқыр пластикалық ағынның таралуын [68], майлаудың гидродинамикалық теориясында қолдануды атап өтеміз.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясының дамуына елеулі үлес қосқан M. Bratu [69], Я.В. Быков [70,71], Т.И. Виграненко [72,73], В.В. Васильев [74-76], В. Н. Николенко [77], Ю.К. Ландо [78,79], Л.Е. Кривошеин [80,81], А. М. Самойленко , С. А. Кривошея, О. А. Бойчук [82], А.И. Некрасов [83], М.И. Иманалиев [84], К.А. Касымов [85,86], М.К. Дауылбаев [87-90], Д.С. Джумабаев [91-94], Э.А.Бакирова [95], К. Усманов [96], және басқалар [97-99].

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жуық шешімін іздеп табу кезінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің интегралдық мүшесін квадратуралық формуламен ауыстырғанда жүктелген дифференциалдық теңдеулер пайда болады. Жүктелген теңдеулер теориясының дамуына А.М. Нахушевтің [100,101] еңбектері айтарлықтай үлес қосты. Еңбектерінде жүктелген дифференциалдық, жүктелген интегралдық-дифференциалдық, жүктелген функционалдық теңдеулердің анықтамалары берілген. А.М. Нахушев пен оның шәкірттерінің еңбектері жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді жүйелі түрде зерттеуге ықпалын тигізді. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін біртекті емес есептердің шешімділік мәселелерін Соболев кеңістігінде М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов [102,103] және олардың шәкірттері зерттеді.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер функционалдық дифференциалдық теңдеулердің маңызды ішкі класын құрайды.

Диссертациялық жұмыста параметрлеу әдісінің негізінде келесі есептер зерттеледі:

1) Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулеті;

2) Сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есеп;

3) Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті;

4) Аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер әулеті.

Зерттеудің мақсаты – интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін зерттеу және шешу әдістерін құру, оларды гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептердің шешімдерінің қасиеттерін анықтау және шешудің конструктивті әдістерін құру үшін қолдану.

Зерттеудің міндеттері:

1) Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмдерін ұсыну, олардың жинақтылық шарттарын алу. Сонымен бірге бұл шарттар аталған есептердің шешілімділік шарттары болатынын дәлелдеу.

2) Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің қисынды шешілімді болудың қажетті және жеткілікті шарттарын тағайындау және дәлелдеу.

3) Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің «оқшауланған» шешімінің есептің бастапқы деректерінің аз ауытқуларынан үзіліссіз тәуелді болу шарттарын анықтау.

4) Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің аралас туындылы гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті зерттеуге қолданылуын көрсету, яғни: шешімін табу алгоритмдерін құру тәсілін көрсету, шешімі бар болудың жеткілікті шарттарын интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешілімділік шарттарының салдары ретінде анықтау.

5) Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімін табудың параметрлеу әдісінің идеясына сүйеніп өзгертілген алгоритмдері және қойылған есептің сандық шешімін табу тәсілін ұсыну. Осы алгоритмдер негізінде сызықтық гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмін жасау.

6) Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетінің және сызықтық емес гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті жуықтап шешу әдістері тестілік есептерде шешімін табу алгоритмдерінің жүзеге асырылуын көрсету.

Зерттеу нысаны интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті және оны гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер әулетіне қолданылуы болып табылады.

Зерттеу әдістемесі

Диссертациялық жұмыстың есептерін зерттеп, шешу үшін Джумабаевтың параметрлеу әдісі [27, 28] және шенелмеген операторлық теңдеулер үшін итерациялық әдістер [104-106], дифференциалдық теңдеулер теориясы әдістері қолданылды.

Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңыздылығы.

Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісіне негізделген интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті есебінің шешімдерін табудың тиімді алгоритмдерін құру, оқшауланған шешімдердің болу критерийлерін тағайындау, шешімдерді табудың әдісін ұсыну және осы нәтижелерді гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептерге қолдану жоспарланған. Зерттеудің практикалық маңыздылығы оның нәтижелері дербес туындылы гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер әулетімен сипатталған модельденген процестерді сапалы және сандық талдауға негіз бола алатындығында.

Сенімділік және негізділік. Зерттелген диссертациялық жұмыста дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының, математикалық физиканың нәтижелері мен әдістері кеңінен қолданылады. Диссертацияда қарастырылған есептерді зерттеу және шешу барысында параметрлеу әдісі мен итеррациялық әдіс қолданылады. Негізгі тұжырымдар теоремалар, салдар түрінде құрылып, олардың дәлелдеулері берілген.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс "Дифференциалдық-алгебралық теңдеулер үшін шеттік есептер: қасиеттері мен шешу әдістері" (№AP19675193, 2022-2024жж.) жобасы аясында «Жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулер» басымдығы бойынша гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Ғылыми жаңалық. Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер.

Диссертациялық жұмыста «Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептер әулеті және оның қолданылуы» тақырыбы бойынша есеп қарастырылып, Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісі негізінде зерттеліп, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеттерін зерттеудің және шешудің алгоритмдері өзгертілген параметрлеу әдісі;

–интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеттерін зерттеу және шешу арқылы аралас туындылы гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті зерттеу және шешу;

–қарастырылған есептердің шешімін табу алгоритмдері және олар жинақты болудың жеткілікті шарттары;

–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің, аралас туындылы гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің шешімі бар болудың жеткілікті шарттары.

Жұмысты апробациялау. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды

– Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (5-7 сәуір 2022 жыл. ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ. Қазақстан Республикасы)

– «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары» IX халықаралық ғылыми конференция (24-28 мамыр 2022 жыл. Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қаласы, Қазақстан Республикасы)

– Профессор Т.Ғ. Мустафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (8-9 қыркүйек 2022 жыл. академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды қаласы, Қазақстан Республикасы)

– «Dynamical Systems, Modeling, and Mathematical Sciences» халықаралық конференциясы (23-25 қыркүйек 2022 жыл. Дубай қ. БАӘ)

– Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (5-7 сәуір 2023 жыл. ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы)

Жарияланымдар. Диссертацияның нәтижелері бойынша 9 жұмыс жарияланды:

– Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:

1. On a Solution of a Nonlinear Nonlocal Boundary Value Problem for one Class of Hyperbolic Equation // Lobachevskii journal of mathematics–Kazan Federal University. –2023, –Vol.44(7), –P.2529–2542.

2. Well-posedness criteria for one family of boundary value problems // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. –2023. –№ 4(112). –P. 5–20.

– Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдардағы жарияланымдар:

1. Об одном методе решения семейства нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник КазНПУ имени Абая, Серия «Физико-математические науки»–2021, –№1(73), -Р.70-76.

2. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетінің қолданылуы туралы // КазНПУ им.Абая, Серия «Физико-математические науки» –2022, –№3(79), -Р.7-13.

– халықаралық ғылыми конференциялардың еңбектеріндегі жарияланымдар:

1. О выборе начального приближения нелинейной нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы. Алматы 5-7 сәуір 2022 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, –2022. –107-108 б.).

2. Начальное приближение решения нелинейной нелокальной краевой задачи для одного класса систем гиперболических уравнений // IX халықаралық ғылыми конференция «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары», Ақтөбе, 24-28 мамыр 2022 жыл: баяндамалар тезистері (Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 2022. –101 б.).

3. О применении семейства краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений // Профессор Т.Ғ. Мустафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы, Қарағанды 8–9 қыркүйек 2022 жыл: баяндамалар тезистері (Қарағанды: академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, –2022. –146-147 б.).

4. On the solvability of the nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations // «Dynamical Systems, Modeling, and Mathematical Sciences» халықаралық конференциясы Дубай 23-25 қыркүйек 2022 жыл:

баяндамалар тезистері (Дубай –2022. –58 б.).

5. О критериях разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы. Алматы 5-7 сәуір 2023 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, –2023. –60 б.).

Диссертациялық жұмыс нәтижелері бойынша 9 жұмыс жарияланды: 2 мақала Scopus тізіміне енетін журналдарда [121,122] және 2 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда [123,124], сондай-ақ 5 халықаралық ғылыми конференциялар еңбектерінде [125-129].

Диссертацияның көлемі мен құрылымы. Жұмысқа тақырып парағы, мазмұны, нормативтік сілтемелер, көмекші нәтижелер, қолданылатын белгілеулер, кіріспе, үш бөлім, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Формулалардың, теоремалардың, шарттардың және анықтамалардың нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан бөлім нөмірін, екінші сан ішкі бөлім нөмірін, үшінші сан ішкі бөлім ішіндегі формуланың меншікті нөмірін, теореманы, шартты, анықтамаларды білдіреді. Диссертациялық жұмыс 126 беттен тұрады.

Жұмыстың қысқаша мазмұны.

Диссертациялық жұмыстың 1 бөлімінде жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулеті қарастырылды. Олардың шешімдерін табу алгоритмдері құрылып, құрылған алгоритмдердің орындалуы мен жинақталуының жеткілікті шарттары алынды және шешімдерінің жалғыздығы дәлелденді. Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетінің қисынды шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары дәлелденді.

Диссертацияның 1.1 ішкі бөлімінде дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулеті қарастырылды. Д.С. Джұмабаевтың параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің бір модификациясы негізінде зерттелетін есептің жуық шешімін табу алгоритмдері ұсынылды және олардың жинақтылығы дәлелденді. Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша есеп дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көп нүктелі шеттік есептерінің эквивалентті әулетіне түрлендіріледі. Жаңа белгісіз функцияларды енгізу арқылы біз зерттелетін есепті баламалы есеп, екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіреміз. Оның шешімдерінің бар болу сұрақтары зерттеліп, жуық шешімді табу әдістері ұсынылды. Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімі бар болудың жеткілікті шарттары анықталды.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетін қарастырғанда x -ті бекітіп аламыз, яғни есепті әулет параметрі x -тің қандай да бір мәнінде зерттейміз.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулеті қарастырылды

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + f(x,t), \qquad (x,t) \in [0,\omega] \times (0,T), \qquad (0.1)$$

$$B_1(x)v(x,0) + B_2(x)v(x,T) = d(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (0.2)$$

мұндағы $(n \times n)$ -матрица $A(x,t)$ және n-вектор-функция $f(x,t)$ $[0,\omega] \times [0,T]$ облысында үзіліссіз, $B_1(x)$, $B_2(x)$– $(n \times n)$ өлшемді матрицалар және n -вектор функция $d(x)$ $[0,\omega]$ -да үзіліссіз, $\|A\| = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in(0,T)} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)| \le a_0$ $(a_0 - const)$, $\|v\| = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in(0,T)} |v_i(x,t)| < \infty$, $x \in [0,\omega]$ – әулет параметрі.

Анықтама 0.1 *(0.1), (0.2) есебінің шешімі деп* $t \in [0,T]$ *бойынша үзіліссіз дифференциалданатын, әрбір* $x \in [0,\omega]$ *үшін (0.1) дифференциалдық теңдеуді және (0.2) шеттік шартын қанағаттандыратын* $v^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *функциясы аталады.*

(0.1), (0.2) есебі параметрлеу әдісі негізінде [27] зерттеледі. x– $[0,\omega]$ -да кейбір бекітілген параметр болсын. Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша N санын аламыз және келесі бөлшектеуді орындаймыз: $\{x\} \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x), \Omega_r(x) = \{x\} \times [(r-1)h, rh), r = \overline{1,N}.$

Белгісіз $v(x,t)$ функциясының $\Omega_r(x)$ облысына тарылуын $v_r(x,t)$ арқылы белгілейміз, яғни $v_r(x,t) = v(x,t)$, $t \in \Omega_r(x)$, $r = \overline{1,N}$. Онда (0.1), (0.2) шеттік есебі

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + f(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \qquad (0.3)$$

$$B_1(x)v_1(x,0) + B_2(x) \lim_{t\to Nh-0} v_N(x,t) = d(x), \qquad (0.4)$$

$$\lim_{t\to rh-0} v_r(x,t) = v_{r+1}(x,rh) \; r = \overline{1,N-1} \qquad (0.5)$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметр енгізілген эквивалентті көп нүктелі шеттік есептер әулетіне көшеді. Мұндағы (0.5) – бөліктелген $\{x\} \times [0,T)$ аралығының ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарты.

Анықтама 0.2 $v^*(x,[t]) = (v_1^*(x,t), v_2^*(x,t) \dots v_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ *функциялар жүйелерін (0.3)-(0.5) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) *Кез келген* r *үшін* $\Omega_r(x)$*-те* $v_r^*(x,t)$ *функциясы үзіліссіз дифференциалданады және (0.3) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады,*
2) $v_1^*(x,0)$, $\lim_{t\to Nh-0} v_N^*(x,t)$, $\lim_{t\to rh-0} v_r^*(x,t)$, $v_{r+1}^*(x,rh)$, $r = \overline{1,N}$ *шамалары (0.4), (0.5) теңдіктерін қанағаттандырады.*

$\Omega_r(x)$ аралығында $\tilde{v}_r(x,t) = v(x,t) - \lambda_r(x)$, алмастыруын енгізсек, мұндағы $\lambda_r(x) = v(x,(r-1)h),\ r = \overline{1,N},\ \lambda_{N+1}(x) = \lim_{t\to T-0} v(x,t)$, онда

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r(x)) + f(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{0.6}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \tag{0.7}$$

$$B_1(x)\lambda_1(x) + B_2(x)\lambda_{N+1}(x) = d(x), \tag{0.8}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0,\ r = \overline{1,N} \tag{0.9}$$

параметр енгізілген эквивалентті есебіне түрлендіріледі. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ арқылы элементтері $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{N+1}^*(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$, $\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t), \tilde{v}_2^*(x,t) \dots \tilde{v}_N^*(x,t)) \in C([0,\omega]\times[0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ болатын жұпты белгілейміз. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x,t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (0.6)-(0.7) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r(x) + \lim_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ (0.8), (0.9) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 0.3 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ *жұбын (0.6)- (0.9) есебінің шешімі деп айтамыз.*

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы (0.6)-(0.9) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad x \in [0,\omega], \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (0.1), (0.2) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес шешімі болады.

Керісінше, $\hat{v}(x,t)$ функциясы (0.1)-(0.2) есебінің шешімі болсын.

Белгілеулер енгізейік:

$\hat{\lambda}(x) = (\hat{\lambda}_1(x), \hat{\lambda}_2(x), \dots, \hat{\lambda}_{N+1}(x))$, $\hat{\tilde{v}}(x,[t]) = (\hat{\tilde{v}}_1(x,t), \hat{\tilde{v}}_2(x,t), \dots \hat{\tilde{v}}_N(x,t))$, мұндағы

$\hat{\lambda}_r(x) = \hat{v}(x,(r-1)h), \quad r = \overline{1,N},\ \hat{\lambda}_{N+1}(x) = \hat{v}(x,T),$

$\hat{\tilde{v}}_r(x,t) = \hat{v}(x,t) - \hat{v}(x,(r-1)h), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$

Онда, (0.1)-(0.2) және (0.6)-(0.9) есептерінің эквиваленттілігінен $(\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{v}}(x,[t]))$ жұбы (0.6)-(0.9) есебінің шешімі болады.

Белгілі $\lambda(x)$ үшін $\Omega_r(x)$ аралығында (0.6), (0.7) Коши есебі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулеріне эквивалентті болады:

$$\tilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\tilde{v}_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau,$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (0.10)$$

$\tilde{v}_r(x,\tau)$ орнына (0.10) теңдіктің сәйкес оң жағын қойып, осы процесті ν рет қайталай отырып, $\tilde{v}_r(x,t)$ функцияның түрін анықтап, шектерін тауып, алдын-ала (0.8)-ді $h > 0$ санына көбейтіп, оларды (0.8), (0.9)-шы теңдіктерге қоямыз. Яғни, біз $\lambda_r(x)$–ке қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін құрып аламыз. Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша (0.6)-(0.9) есебінің шешімін табу алгоритмі ұсынылады.

Диссертацияның 1.2 ішкі бөлімінде дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімін табу алгоритмінің орындалуы мен жинақталуы үшін жеткілікті шарт болып табылатын тұжырым дәлелденді. Бұл тұжырым (0.6)-(0.9) параметр енгізілген шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімі бар болуын қамтамасыз етеді.

Жұмыстың 1.3 ішкі бөлімінде жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетінің қисынды шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары болып табылатын тұжырымдар дәлелденді.

Диссертациялық жұмыстың 2 бөлімінде дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулеті зерттелді. Бұл бөлімде сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есеп қарастырылады. Әулет параметрінің қандай да бір бекітілген мәні үшін зерттелетін шеттік есеп жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есеп болып табылады. Сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімін табудың сандық әдісі келтірілді және мысалдар қарастырылды. Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулетіне дербес туындылы теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептер, атап айтқанда, аралас туындылы гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер келтірілді.

Жұмыстың 2.1 ішкі бөлімінде сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетін қарастырамыз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in [0,\omega] \times (0,T), \qquad (0.11)$$

$$g\big(x, v(x,0), v(x,T)\big) = 0, \quad x \in [0,\omega], \qquad (0.12)$$

мұндағы $(n \times n)$ -матрица $A(x,t)$ $[0,\omega] \times [0,T]$ облысында үзіліссіз, n -вектор-функция $F(x,t)$ $[0,T]$ -да үзіліссіз функция, x – әулет параметрі, g: $[0,\omega] \times R^n \times$

$R^n \to R^n$ – үзіліссіз функция, $\|A\| = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in(0,T)} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)| \le a_0$ $(a_0 - const)$, $\|v\| = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in(0,T)} |v_i(x,t)| < \infty$.

Анықтама 0.4 *(0.11), (0.12) есебінің шешімі деп $t \in [0,T]$ бойынша үзіліссіз дифференциалданатын әрбір $x \in [0,\omega]$ үшін (0.11) дифференциалдық теңдеуді және (0.12) шеттік шартын қанағаттандыратын $v^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^{nN})$ функциясы аталады.*

$x -$ $[0,\omega]$-да кейбір бекітілген параметр болсын. N $(N = 1,2,\ldots)$ натурал сан таңдаймыз, $[0,T]$ кесіндісін нүктелермен бөлеміз $t_p = p \cdot h$, $p = \overline{0,N}$, $h = T/N$.

Белгілеулерді енгіземіз:

$\Omega_r(x) = \{(x,t): x \in [0,\omega], t \in [t_{r-1}, t_r]\}$, $r = \overline{1,N}$;

$\Delta_N(x)$– $[0,\omega] \times [0,T)$ облысының бөлшектенуі, яғни,

$$\Delta_N(x): \{x\} \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x)\,;$$

$\lambda_r(x) = v(x,t_{r-1})$, $r = \overline{1,N}$, $\lambda_{N+1}(x) = \lim_{t\to t_N-0} v(x,t)$;

$\tilde{v}(x,t) = v(x,t) - \lambda_r(x)$, $t \in \Omega_r(x)$, $\quad r = \overline{1,N}$;
$C([0,\omega] \times [0,T], \Delta_N(x), R^{nN})$ – нормасы

$$\|v\|_2 = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in\Delta_N(x)} |v_{r,i}(x,t)|$$

болатын $v(x,[t]) = (v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_N(x,t))$ функциялар жүйелерінің кеңістігі, мұндағы $v_r(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ үзіліссіз функциялар және әрбір $x \in [0,\omega]$ қатысты бірқалыпты $\lim_{t\to t_r-0} v_r(x,t)$ ақырлы шегі бар $(r = \overline{1,N})$.

(0.11), (0.12) есебі параметр енгізілген шеттік есепке эквивалентті

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\lambda_r(x) + \tilde{v}_r) + F(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{0.13}$$

$$\tilde{v}_r(x,t_{r-1}) = 0, \tag{0.14}$$

$$g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) = 0, \tag{0.15}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t\to t_r-0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0\,, r = \overline{1,N} \tag{0.16}$$

мұндағы (0.16)- шешімнің $\Delta_N(x)$ ішкі нүктелеріндегі үзіліссіздік шарттары. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ арқылы элементтері $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{N+1}^*(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$, $\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t), \tilde{v}_2^*(x,t) \dots \tilde{v}_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T], \Delta_N(x), R^{nN})$ болатын жұпты белгілейміз. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x,t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (0.13)-(0.14) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r(x) + \lim\limits_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ (0.15), (0.16) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 0.5 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ *жұбын (0.13)- (0.16) есебінің шешімі деп айтамыз.*

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы (0.13)-(0.16) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad x \in [0,\omega], \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (0.11)-(0.12) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес шешімі болады.

Керісінше, $\hat{v}(x,t)$ функциясы (0.11)-(0.12) есебінің шешімі болсын.

Белгілеулер енгізейік:

$\hat{\lambda}(x) = (\hat{\lambda}_1(x), \hat{\lambda}_2(x), \dots, \hat{\lambda}_{N+1}(x))$, $\hat{\tilde{v}}(x,[t]) = (\hat{\tilde{v}}_1(x,t), \hat{\tilde{v}}_2(x,t), \dots \hat{\tilde{v}}_N(x,t))$, мұндағы

$\hat{\lambda}_r(x) = \hat{v}(x,(r-1)h), \quad r = \overline{1,N}, \hat{\lambda}_{N+1}(x) = \hat{v}(x,T),$

$\hat{\tilde{v}}_r(x,t) = \hat{v}(x,t) - \hat{v}(x,(r-1)h), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$

Онда, (0.11)-(0.12) және (0.13)-(0.16) есептерінің эквиваленттілігінен $(\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{v}}(x,[t]))$ жұбы (0.13)-(0.16) есебінің шешімі болады.

Әуелі, $\lambda_r(x)$ $(r = \overline{1,N})$ үшін белгілі деп алып (0.13), (0.14) Коши есебін шешіп $\tilde{v}_r(x,t)$ анықтап алып, $\lim\limits_{t\to t_r-0} \tilde{v}_r(x,t)$ шегін тауып, (0.15), (0.16) теңдіктерге қоямыз. Белгісіз $\lambda(x)$ параметрлерге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін анықтаймыз. Құрылған сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу алгоритмі ұсынылады. Сызықтық емес теңдеулер жүйесінің шешімі бар және оның құрылған жиында оқшауланған болатыны туралы тұжырым анықталып, дәлелденеді.

Жұмыстың 2.2 бөлімінде сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімін табудың сандық әдісі қарастырылды. (0.11), (0.12) параметрі бар сызықты емес екі нүктелі шеттік есепті шешудің сандық әдісінің алгоритмі ұсынылды. Қойылған есептің сандық шешімін табудың ұсынылған әдісіне мысалдар қарастырылды.

Жұмыстың 2.3 ішкі бөлімінде $[0,\omega] \times [0,T]$ облысында гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + P(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{0.17}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{0.18}$$

$$g\left(x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right) = 0, \tag{0.19}$$

мұндағы $A(x,t), P(x,t) - (n \times n)$ өлшемді матрицалар, $f: [0,\omega] \times [0,T] \times R^{2n} \to R^n$, $g: [0,\omega] \times R^n \times R^n \to R^n$–үзіліссіз функциялар.

Анықтама 0.6 $u^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *функциясын (0.17)-(0.19) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) $[0,\omega] \times [0,T]$ *облысында өзінің* $\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *және* $\frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x \partial t} \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *дербес туындыларымен бірге (0.17)-ші сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады*,
2) $(x,t) \in [0,\omega] \times [0,T]$ *үшін (0.18), (0.19) шарттарды қанағаттандырады.*

Жаңа $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\lambda_r(x) = v(x,(r-1)h)$, $r = \overline{1,N}$, $\lambda_{N+1}(x) = \lim\limits_{t \to T-0} v(x,t)$, $\tilde{v}_r(x,t) = v(x,t) - \lambda_r(x)$ белгілеулер енгізу арқылы аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есебін әрбір x -ке сәйкес $v(x,t)$ функциялар үшін интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетіне келтіріледі, яғни

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r(x)) + P(x,t)\int_0^x (\tilde{v}_r(\xi,t) + \lambda_r(\xi))d\xi + f(x,t),$$
$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{0.20}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \tag{0.21}$$

$$g\big(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)\big) = 0, \tag{0.22}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0, \qquad r = \overline{1,N} \tag{0.23}$$

параметр енгізілген эквивалентті есебіне түрлендіріледі.

Әуелі, $\lambda_r(x)$ $(r = \overline{1, N+1})$ параметрлері белгілі болсын делік. Онда, әрбір $t \in \Omega_r(x)$ үшін $\tilde{v}_r(x,t)$ функциясын $(r = \overline{1,N})$ (0.20), (0.21) Коши есебінен анықтап, $\lim\limits_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ тауып және табылған мәндерді (0.22), (0.23)-ші теңдіктерге қоямыз. $\lambda_r(x)$ $(r = \overline{1, N+1})$ параметрлерге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін құрып аламыз. Келтірілген интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есебінің шешімін табу алгоритмі ұсынылады.

Демек, қойылған есеп сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есебіне келтіріліп, әрі қарай 2.1 ішкі бөлім бойынша зерттеулері іске асырылады.

Диссертациялық жұмыстың 3 бөлімінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп және оның қолданылуы қарастырылды. Есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылды. Ұсынылған алгоритмдердің орындалуы мен жинақталу шарттары алынды, яғни интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің белгілі бір жиында оқшауланған шешімінің болуының жеткілікті шарттары анықталды. «Оқшауланған» шешімнің бастапқы деректерге үзіліссіз тәуелділігі анықталып, тұжырым дәлелденді. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылып, зерттеулер нәтижесін айқындайтын мысал келтіріліп, графиктері салынды.

Жұмыстың 3.1 ішкі бөлімінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылды

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t)d\xi\,, v\right), \quad v \in R^n, \quad (x,t) \in [0,\omega] \times [0,T], \quad (0.24)$$

$$g(x, v(x,0), v(x,T)) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad (0.25)$$

мұндағы $x \in [0,\omega]$–әулет параметрі, $f: [0,\omega] \times [0,T] \times R^{2n} \to R^n$, $g: [0,\omega] \times R^n \times R^n \to R^n$ үзіліссіз функциялар, $\psi(t)$– $[0,T]$-да үзіліссіз функция, $\|v\| = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in(0,T)} |v_i(x,t)| < \infty$.

Анықтама 0.7 *(0.24), (0.25) есебінің шешімі деп (0.24)-ші интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін және (0.25)-ші шеттік шартты қанағаттандыратын* $[0,T]$*-да (әрбір* $x \in [0,\omega]$ *үшін) үзіліссіз дифференциалданатын* $v(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *функциясын айтамыз.*

Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша бөлшектеу жасап, белгілеулер енгізіп, қарастырып отырған есепке эквивалентті параметрі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін көп нүктелі сызықтық емес шеттік есепке келтіріледі және оның шешімін табудың алгоритмі ұсынылады.

Параметрі бар шеттік есептер әулетінің оқшауланған шешім бар болудың жеткілікті шарты болып табылатын тұжырым дәлелденеді.

Жұмыстың 3.2 ішкі бөлімінде «оқшауланған» шешім ұғымы енгізіліп, «оқшауланған» шешімнің бастапқы деректерінің аз ауытқуларына үзіліссіз тәуелділігі анықталып, тұжырым дәлелденді. $\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,, \tilde{v})$ Якоби матрицасының кері матрицасын есептеудің рекурренттік формуласы ұсынылды.

Жұмыстың 3.3 ішкі бөлімінде гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылды. Жаңа белгісіз функция енгізу арқылы қойылған есепке эквивалентті дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі, яғни (0.24), (0.25) есебінің $\psi(t) \equiv 0$ болғандағы дербес жағдайы болады. Келтірілген параметрі бар шеттік есептер әулетінің оқшауланған шешімі бар болуының жеткілікті шарттары анықталды. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін қолдануды көрсету мақсатында бұл есепті интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетіне келтіру және оның бастапқы жуықтауын табу арқылы аралас туындылы екі гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептердің бастапқы жуықтауын анықтаудың мысалы келтірілді.

Автор ғылыми кеңесшілері әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің механика-математика факультетінің «Математика» кафедрасының физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Светлана Маратовна Темешеваға және Ресей Ғылым Академиясының Уфа федералдық ғылыми-зерттеу орталығы есептеу орталығының бас ғылыми қызметкері, математика институтының дифференциалдық теңдеулер бөлімінің меңгерушісі міндетін атқарушы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Денис Иванович Борисовқа диссертациялық жұмыста орнатылған ғылыми нәтижелерді талқылау кезіндегі пайдалы кеңестері, жан-жақты қолдаулары үшін үлкен ризашылығын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне және әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетіне көрсеткен қолдауы үшін және шетелдік ғылыми кеңесшімен жұмыс жасауға мүмкіндік бергені үшін рақмет айтады.

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІ

1.1 Есептің қойылымы және зерттеу әдісі

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетін қарастырғанда x -ті бекітіп аламыз, яғни есепті x -тің қандай да бір мәнінде зерттейміз. Бұл есеп параметрлеу әдісінің негізінде зерттеледі.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулеті қарастырылады

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + f(x,t), \qquad (x,t) \in [0,\omega] \times (0,T), \tag{1.1.1}$$

$$B_1(x)v(x,0) + B_2(x)v(x,T) = d(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{1.1.2}$$

мұндағы $(n \times n)$ -матрица $A(x,t)$ және n -вектор-функция $f(x,t)$ $[0,\omega] \times [0,T]$ облысында үзіліссіз, $B_1(x)$, $B_2(x)$– $(n \times n)$ өлшемді матрицалар және n -вектор функция $d(x)$ $[0,\omega]$ -да үзіліссіз, $\|A\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in(0,T)} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}(x,t)\right| \le a_0$ ($a_0 - const$), $\|v\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in(0,T)} |v_i(x,t)| < \infty$, $x \in [0,\omega]$ – әулет параметрі.

Анықтама 1.1.1 *(1.1.1), (1.1.2) есебінің шешімі деп* $t \in [0,T]$ *бойынша үзіліссіз дифференциалданатын, әрбір* $x \in [0,\omega]$ *үшін (1.1.1) дифференциалдық теңдеуді және (1.1.2) шеттік шартын қанағаттандыратын* $v^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *функциясы аталады.*

Есептің қойылымы. *(1.1.1), (1.1.2) есебінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмдерін жасау, олардың жинақтылығының шарттарын алу, есептің шешімі бар болудың жеткілікті шарттарын алу.*

(1.1.1), (1.1.2) есебі параметрлеу әдісі негізінде [27] зерттеледі. x– $[0,\omega]$ -да кейбір бекітілген параметр болсын. Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша N санын аламыз және келесі бөлшектеуді орындаймыз: $\{x\} \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x)$, $\Omega_r(x) = \{x\} \times [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$.

$C([0,\omega] \times [0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ – нормасы

$$\|v\|_2 = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in\Omega_r(x)} \left|v_{r,i}(x,t)\right|$$

болатын $v(x,[t]) = (v_1(x,t), v_2(x,t), \dots, v_N(x,t))$ функциялар жүйелерінің кеңістігі, мұндағы $v_r(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ үзіліссіз функциялар және әрбір $x \in [0,\omega]$ қатысты бірқалыпты $\lim\limits_{t\to t_r-0} v_r(x,t)$ ақырлы шегі бар ($r = \overline{1,N}$).

Белгісіз $v(x,t)$ функциясының $\Omega_r(x)$ облысына тарылуын $v_r(x,t)$ арқылы белгілейміз, яғни $v_r(x,t) = v(x,t)$, $t \in \Omega_r(x)$, $r = \overline{1,N}$. Онда (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + f(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{1.1.3}$$

$$B_1(x)v_1(x,0) + B_2(x)\lim_{t\to Nh-0} v_N(x,t) = d(x), \tag{1.1.4}$$

$$\lim_{t\to rh-0} v_r(x,t) = v_{r+1}(x,rh), \qquad r = \overline{1,N-1} \tag{1.1.5}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметр енгізілген эквивалентті көп нүктелі шеттік есептер әулетіне көшеді. Мұндағы (1.1.5) – бөліктелген $\{x\} \times [0,T)$ аралығының ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарты.

Анықтама 1.1.2 $v^*(x,[t]) = (v_1^*(x,t), v_2^*(x,t) \dots v_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ *функциялар жүйесін (1.1.3)-(1.1.5) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) *Кез келген r үшін $\Omega_r(x)$-те $v_r^*(x,t)$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады және (1.1.3) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады,*
2) *$v_1^*(x,0)$, $\lim_{t\to Nh-0} v_N^*(x,t)$, $\lim_{t\to rh-0} v_r^*(x,t)$, $v_{r+1}^*(x,rh)$, $r = \overline{1,N}$ шамалары (1.1.4), (1.1.5) теңдіктерін қанағаттандырады.*

$\Omega_r(x)$ аралығында $\tilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, алмастыруын енгізсек, мұндағы $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$, $r = \overline{1,N}$, $\lambda_{N+1}(x) = \lim_{t\to T-0} v_N(x,t)$, онда

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\big(\tilde{v}_r + \lambda_r(x)\big) + f(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{1.1.6}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \tag{1.1.7}$$

$$B_1(x)\lambda_1(x) + B_2(x)\lambda_{N+1}(x) = d(x), \tag{1.1.8}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0\,, \qquad r = \overline{1,N} \tag{1.1.9}$$

параметр енгізілген эквивалентті есебіне түрлендіріледі. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ арқылы элементтері $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{N+1}^*(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$, $\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t), \tilde{v}_2^*(x,t) \dots \tilde{v}_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ болатын жұпты белгілейміз. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x,t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (1.1.6)-(1.1.7) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r(x) + \lim_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ (1.1.8), (1.1.9) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 1.1.3 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ *жұбын (1.1.6)- (1.1.9) есебінің шешімі деп айтамыз.*

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы (1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad x \in [0,\omega], \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (1.1.1), (1.1.2) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес шешімі болады.

Керісінше, $\hat{v}(x,t)$ функциясы (1.1.1)-(1.1.2) есебінің шешімі болсын.

Белгілеулер енгізейік:

$\hat{\lambda}(x) = (\hat{\lambda}_1(x), \hat{\lambda}_2(x), \dots, \hat{\lambda}_{N+1}(x))$, $\hat{\tilde{v}}(x,[t]) = (\hat{\tilde{v}}_1(x,t), \hat{\tilde{v}}_2(x,t), \dots \hat{\tilde{v}}_N(x,t))$, мұндағы

$\hat{\lambda}_r(x) = \hat{v}(x,(r-1)h), \quad r = \overline{1,N},\ \hat{\lambda}_{N+1}(x) = \hat{v}(x,T),$

$\hat{\tilde{v}}_r(x,t) = \hat{v}(x,t) - \hat{v}(x,(r-1)h), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$

Онда, (1.1.1)-(1.1.2) және (1.1.6)-(1.1.9) есептерінің эквиваленттілігінен $(\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{v}}(x,[t]))$ жұбы (1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімі болады.

(1.1.6)-(1.1.9) есебінде $\tilde{v}(x,[t])$ функциялар жүйесінің элементтері үшін (1.1.7) бастапқы шарттары пайда болды. Белгілі $\lambda_r(x)$ үшін $\Omega_r(x)$ аралығында (1.1.6), (1.1.7) Коши есебі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулеріне эквивалентті болады:

$$\tilde{v}_r(x,t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\tilde{v}_r(x,\tau)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau,$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (1.1.10)$$

$\tilde{v}_r(x,\tau)$ орнына (1.1.10) теңдіктің сәйкес оң жағын қойып, осы процесті ν рет қайталай отырып, $\tilde{v}_r(x,t)$ функцияның келесі түрін аламыз:

$$\tilde{v}_r(x,t) = D_{\nu,r}(x,t) \cdot \lambda_r(x) + F_{\nu,r}(x,t) + G_{\nu,r}(x,t,\tilde{v}), \qquad (1.1.11)$$

мұндағы

$$D_{\nu,r}(x,t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1}) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(x,t,\tilde{v}) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\tilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$t \in \Omega_r(x), r = \overline{1,N}.$$

(1.1.11)-ден

$$\lim_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x,t) = D_{\nu,r}(x,rh) \cdot \lambda_r(x) + F_{\nu,r}(x,rh) + G_{\nu,r}(x,rh,\tilde{v}), \quad r = \overline{1,N}.$$

шектерін анықтап, алдын-ала (1.1.8)-ді $h > 0$ санына көбейтіп, оларды (1.1.8), (1.1.9)-ші теңдіктерге қоямыз. Сонда біз $\lambda_r(x)$ -ке қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$hB_1(x)\lambda_1(x) + hB_2(x)\lambda_{N+1}(x) = hd(x), \tag{1.1.12}$$

$$\left(I + D_{\nu,r}(x,rh)\right)\lambda_r(x) - \lambda_{r+1}(x) = -F_{\nu,r}(x,rh) - G_{\nu,r}(x,rh,\tilde{v}), \qquad r = \overline{1,N}. \tag{1.1.13}$$

(1.1.12), (1.1.13) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\tilde{v}), \quad \lambda(x) \in C\left([0,\omega], R^{n(N+1)}\right), \tag{1.1.14}$$

мұндағы

$$Q_\nu(x,h) = \begin{pmatrix} hB_1(x) & O & O & \cdots & O & hB_2(x) \\ I + D_{\nu,1}(x,h) & -I & O & \cdots & O & O \\ O & I + D_{\nu,2}(x,2h) & -I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & -I & O \\ O & O & O & \cdots & I + D_{\nu,N}(x,Nh) & -I \end{pmatrix}$$

$$F_\nu(x,h) = (-hd(x), F_{\nu,1}(x,h), F_{\nu,2}(x,2h), \dots, F_{\nu,N}(x,Nh)),$$

$$G_\nu(x,h,\tilde{v}) = (O^{\langle 1 \rangle}, G_{\nu,1}(x,h,\tilde{v}), G_{\nu,2}(x,2h,\tilde{v}), \dots, G_{\nu,N}(x,Nh,\tilde{v})).$$

Көріп отырғанымыздай, (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің шешімін табу процесі (1.1.14) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін және (1.1.6), (1.1.7) Коши есептерін шешу процестерінен тұрады.

(1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімін табу алгоритмі ұсынылады.

$Q_\nu(h,x)$ матрицасының барлық $x \in [0,\omega]$ үшін кері матрицасы бар болсын деп ұйғарамыз.

0-ші қадам.

(a) $\lambda^{(0)}(x)$ параметрін

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h)$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(0)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(0)}(x,t), \tilde{v}_2^{(0)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(0)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(0)}(x)) + f(x,t),$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0,T]$ -да

$$v^{(0)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0,\omega]$.

1-ші қадам.

(a) $\lambda^{(1)}(x)$ параметрін

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\tilde{v}^{(0)})$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(1)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(1)}(x)) + f(x,t),$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0, T]$ -да

$$v^{(1)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(1)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0, \omega]$.

Айталық, $(\lambda^{(k-1)}(x), \tilde{v}^{(k-1)}(x,[t]))$ жұбы анықталған болсын.

***k*-шы қадам.**

(a) $\lambda^{(k)}(x)$ параметрлерін

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\tilde{v}^{(k-1)})$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(k)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(k)}(x,t), \tilde{v}_2^{(k)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(k)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(k)}(x)) + f(x,t),$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0, T]$ -да

$$v^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0, \omega]$.

1.2 Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімі бар болудың жеткілікті шарттары

Шарт 1.2.1 *Кез келген* $x \in [0, \omega]$ *үшін* $Q_\nu(x,h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *матрицасының кері матрицасы бар болады және келесі теңсіздіктер орындалады:*

$$\|(Q_\nu(x,h))^{-1}\| \le \gamma_\nu(x,h) \le \gamma_\nu(h), \tag{1.2.1}$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \frac{e^c (a_0 h)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} < 1, \quad 0 < c < a_0 h \tag{1.2.2}$$

Келесі тұжырым ұсынылған алгоритмнің орындалуы мен жинақталуы үшін жеткілікті шарт болып табылады. Бұл тұжырым (1.1.6)-(1.1.9) параметр енгізілген шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімнің болуын қамтамасыз етеді.

Теорема 1.2.1 *Кейбір* $h > 0: Nh = T$, ν *үшін 1.2.1-ші шарт орындалсын. Онда* $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t]))$ *жұптар тізбегі (1.1.6)-(1.1.9) есебінің* $(\lambda^{*}(x), \tilde{v}^{*}(x,[t]))$ *жалғыз шешіміне жинақталады және келесі бағалаулар орындалады:*

$$\left\|\lambda^{*} - \lambda^{(k)}\right\|_3 \le \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|_3, \qquad (1.2.3)$$

$$\left\|\tilde{v}_r^{*}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x,t)\right\| \le \left(e^{a_0(t-(r-1)h)} - 1\right) \left\|\lambda_r^{*}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\right\|, \qquad (1.2.4)$$

мұндағы $t \in \Omega_r(x)$, $r = \overline{1,N}$, $k = 1,2,\ldots$.

Дәлелдеуі. Есептің берілгені бойынша $A(x,t)$ матрицасы $[0,\omega] \times [0,T]$ -да үзіліссіз және $B_1(x)$, $B_2(x)$ матрицалары $[0,\omega]$ -да үзіліссіз. Демек, $[0,\omega]$ -да $Q_\nu(x,h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасы үзіліссіз болады. Онда $(Q_\nu(x,h))^{-1}: R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ үзіліссіз болады, себебі кез келген $\tilde{x}$, $\hat{x} \in [0,\omega]$ үшін

$$\|(Q_\nu(\tilde{x},h))^{-1} - (Q_\nu(\hat{x},h))^{-1}\| =$$

$$= \|(Q_\nu(\tilde{x},h))^{-1}\| \cdot \|Q_\nu(\hat{x},h) - Q_\nu(\tilde{x},h))\| \cdot \|(Q_\nu(\hat{x},h))^{-1}\| \le$$

$$\le \gamma_\nu^2(h))\|Q_\nu(\hat{x},h) - Q_\nu(\tilde{x},h)\|$$

теңсіздігі орындалады.

(1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімін алгоритм бойынша іздейміз.

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h)$$

теңдеуін шеше отырып $\lambda^{(0)}(x)$ анықтаймыз. $(Q_\nu(x,h))^{-1}$ матрицасы және $F_\nu(x,h)$ векторы үзіліссіз, сондықтан $\lambda^{(0)}(x) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\|_3 \le \gamma_\nu(h) h \, max\{1, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(a_0 h)^j}{j!}\} max\{\|d\|_0, \|f\|_1\}. \qquad (1.2.5)$$

Кез келген r үшін $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ функциясын

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r^{(0)}(x) + f(x,t), \quad \tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0,$$
$$r = \overline{1,N}, \qquad (1.2.6)$$

Коши есебін шешіп табамыз.

$\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ функциясын бағалайық. Ол үшін (1.2.6) теңдеуін $(r-1)h$ -тан t -ға дейін интегралдаймыз

$$\tilde{v}_r^{(0)}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)(\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau) + \lambda_r^{(0)}(x))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$$

$\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ үшін

$$\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} a_0\left(\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\right)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \|f(x,\tau)\|d\tau$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}$$

бағалауын аламыз. Теңсіздіктің екі жағына $\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|$ нормасын қоссақ,

$$\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| \leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} a_0(\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} \|f(x,\tau)\|d\tau + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}$$

теңсіздігінен Гронуолла-Беллман леммасы бойынша келесі бағалауды аламыз:

$$\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| \leq \left(\|f\|_1(t-(r-1)h) + \left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\right)e^{\int_{(r-1)h}^{t} a_0 d\tau},$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$$

Онда $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ нормасы үшін

$$\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \leq (e^{a_0(t-(r-1)h)} - 1)\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| + (t-(r-1)h)e^{a_0(t-(r-1)h)}\|f\|_1,$$

бағалауы орынды, осыдан келесі бағалау шығады

$$\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le (e^{a_0 h} - 1)\left\|\lambda^{(0)}\right\|_3 + he^{a_0 h}\|f\|_1. \qquad (1.2.7)$$

Әрі қарай, алгоритм бойынша

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\tilde{v}^{(0)})$$

теңдеуінен $\lambda^{(1)}(x)$ -ті табамыз. Онда,

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 = \left\|-(Q_\nu(x,h))^{-1} \cdot G_\nu(x,h,\tilde{v}^{(0)})\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h) \max_{r=\overline{1,N}} \left\|G_{\nu,r}(x,rh,\tilde{v}^{(0)})\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h) \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} a_0 \cdots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} a_0 \left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau_\upsilon)\right\| d\tau_\upsilon \cdots d\tau_1 \right\} \le$$

$$\le \gamma_\nu(h) \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} \left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2$$

яғни,

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \gamma_\nu(h) \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} \left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \qquad (1.2.8)$$

бағалауы орынды.

$\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(1)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t))$ функциялар жүйесі компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r^{(1)}(x) + f(x,t), \quad \tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0,$$
$$r = \overline{1,N} \qquad (1.2.9)$$

Коши есебін шешіп табамыз.

$(\tilde{v}_r^{(1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t))$ айырымын бағалайық.

Ол үшін (1.2.9) теңдеуін $(r-1)h$ -тан t -ға дейін интегралдап

$$\tilde{v}_r^{(1)}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)(\tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau) + \lambda_r^{(1)}(x))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau,$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N},$$

$(\tilde{v}_r^{(1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t))$ айырымының нормасы үшін

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|=\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau)(\tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau)+\lambda_r^{(1)}(x))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(x,\tau)d\tau-\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau)\,(\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)+\lambda_r^{(0)}(x))d\tau-\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(x,\tau)d\tau\right\|\leq$$

$$\leq\int\limits_{(r-1)h}^{t}a_0\left(\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|+\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\right)d\tau,$$

$$t\in\Omega_r(x),\quad r=\overline{1,N}$$

бағалауын аламыз. Теңсіздіктің екі жағына $\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|$ нормасын қоссақ,

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|+\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\leq$$

$$\leq\int\limits_{(r-1)h}^{t}a_0\left(\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|+\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\right)d\tau+$$

$$+\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|,\qquad t\in\Omega_r(x),\quad r=\overline{1,N}$$

теңсіздігінен Гронуолла-Беллман леммасы бойынша келесі бағалауды аламыз:

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|+\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|e^{a_0(t-(r-1)h)},\quad t\in\Omega_r(x),\quad r=\overline{1,N}.$$

Осыдан, $(\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t))$ айырымының нормасы үшін келесі бағалау орынды:

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|\leq(e^{a_0(t-(r-1)h)}-1)\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|.$$

Айталық, $(\lambda^{(k-1)}(x),\tilde{v}^{(k-1)}(x,[t]))$ жұбы анықталған болсын және барлық $t\in\Omega_r(x)$ үшін келесі теңсіздіктер орындалсын:

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3 \le q_\nu(h)\left\|\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right\|_3,$$

$$\left\|\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k-2)}(x,t)\right\| \le \left(e^{a_0(t-(r-1)h)}-1\right)\left\|\lambda^{(k-1)}(x)-\lambda^{(k-2)}(x)\right\|, \tag{1.2.10}$$

$$\left\|\tilde{v}^{(k-1)}-\tilde{v}^{(k-2)}\right\|_2 \le (e^{a_0 h}-1)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3. \tag{1.2.11}$$

Онда, алгоритмнің k -шы қадамында

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\tilde{v}^{(k-1)})$$

теңдеуін шешіп, $\lambda^{(k)}(x)$ табамыз. (1.2.11)-ші теңсіздікті ескере отырып,

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 \le q_\nu(h)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3, \quad k=2,3,\dots . \tag{1.2.12}$$

бағалауын аламыз. $\tilde{v}^{(k)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(k)}(x,t), \tilde{v}_2^{(k)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(k)}(x,t))$ функциялар жүйесі компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r^{(k)}(x) + f(x,t), \quad \tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad r=\overline{1,N}$$

Коши есебін шешіп табамыз. Кез келген $t \in \Omega_r(x)$, $r=\overline{1,N}$ $(k=1,2,3,\dots)$ үшін $(\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,t))$ айырымын бағалаймыз:

$$\left\|\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\right\| \le \left(e^{a_0(t-(r-1)h)}-1\right)\left\|\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)\right\|. \tag{1.2.13}$$

Теорема шарты бойынша $q_\nu(h)<1$, сондықтан (1.2.12), (1.2.13) теңсіздіктерінен $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t]))$, $k=0,1,2,\dots$ жұбы $C([0,\omega],R^{n(N+1)}) \times C([0,\omega]\times[0,T],\Omega_r(x),R^{nN})$ жиынында (1.1.6)-(1.1.9) есебінің $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ шешіміне жинақталады.

$\left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k)}\right\|_3$ нормасын $\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3$ арқылы бағалайық:

$$\left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 \le \left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k+\ell-1)}\right\|_3 + \left\|\lambda^{(k+\ell-1)}-\lambda^{(k+\ell-2)}\right\|_3 + \dots +$$

$$+\left\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 \le (q_\nu(h)+q_\nu^2(h)+\dots+q_\nu^\ell(h))\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 <$$

$$< \sum_{j=1}^{\infty} q_\nu^j(h)\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 = \frac{q_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3,$$

$$\left\|\lambda^{(k+\ell)} - \lambda^{(k)}\right\|_3 \le\le \frac{q_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|_3. \qquad (1.2.14)$$

$(\tilde{v}_r^{(k+\ell)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x,t))$ айырымын келесі түрде бағалаймыз

$$\left\|\tilde{v}_r^{(k+\ell)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x,t)\right\| \le \left(e^{a_0(t-(r-1)h)} - 1\right)\left\|\lambda_r^{(k+\ell)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\right\|. \quad (1.2.15)$$

Осыдан, (1.2.14), (1.2.15) теңсіздіктерінде $\ell \to \infty$ шекке көшіп, (1.2.3), (1.2.4) бағалауларының дұрыстығын анықтаймыз.

(1.1.6)-(1.1.9) есебінің шешімінің жалғыздығын көрсетейік. Айталық, $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ және $(\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{v}}(x,[t]))$ жұптары (1.1.6)-(1.1.9) шеттік есебінің екі шешімі болсын.

Біздің болжамымыз бойынша, келесі теңдіктер орындалады:

$$\tilde{v}_r^*(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\tilde{v}_r^*(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r^*(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau,$$

$$\hat{\tilde{v}}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\hat{\tilde{v}}_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \hat{\lambda}_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau)d\tau,$$

$$\lambda^*(x) = -Q_\nu^{-1}(x,h)(F_\nu(x,h) + G_\nu(x,h,\tilde{v}^*)),$$

$$\hat{\lambda}(x) = -Q_\nu^{-1}(x,h)(F_\nu(x,h) + G_\nu(x,h,\hat{\tilde{v}})).$$

$\tilde{v}_r^*(x,t)$ және $\hat{\tilde{v}}_r(x,t)$ функцияларының айырымы үшін

$$\left\|\tilde{v}_r^*(x,t) - \hat{\tilde{v}}_r(x,t)\right\| \le (e^{a_0(t-(r-1)h)} - 1)\left\|\lambda_r^*(x) - \hat{\lambda}_r(x)\right\|$$

бағалауы орынды. Ал, $\lambda^*(x)$ және $\hat{\lambda}(x)$ айырымы үшін

$$\left\|\lambda^*(x) - \hat{\lambda}(x)\right\| \le \|-Q_\nu^{-1}(x,h)\| \cdot \left\|G_\nu(x,h,\tilde{v}^*) - G_\nu(x,h,\hat{\tilde{v}})\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h)\max_{r=\overline{1,N}}\left\|G_\nu(x,h,\tilde{v}^*) - G_\nu(x,h,\hat{\tilde{v}})\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h)\max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} a_0 \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} a_0 \cdots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} a_0\left\|\tilde{v}_r^*(x,\tau_\nu) - \hat{\tilde{v}}_r(x,t)\right\| d\tau_\nu \cdots d\tau_2 d\tau_1 \le$$

$$\leq \gamma_\nu(h)\{e^{a_0 h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h)^j}{j!}\} \left\| \lambda_r^*(x) - \hat{\lambda}_r(x) \right\| \leq$$

$$\leq \gamma_\nu(h) \frac{e^c (a_0 h)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \left\| \lambda^* - \hat{\lambda} \right\|_3 \leq q_\nu(h) \left\| \lambda^* - \hat{\lambda} \right\|_3$$

бағалауы орындалады. Ендеше,

$$\left\| \tilde{v}^* - \hat{\tilde{v}} \right\|_2 \leq (e^{a_0 h} - 1) \cdot \left\| \lambda^* - \hat{\lambda} \right\|_3, \tag{1.2.16}$$

$$\left\| \lambda^* - \hat{\lambda} \right\|_3 \leq q_\nu(h) \left\| \lambda^* - \hat{\lambda} \right\|_3 \tag{1.2.17}$$

теңсіздіктері орынды. (1.2.2)-ші теңсіздікті ескерсек, (1.2.17)-ден $\lambda^*(x) = \hat{\lambda}(x)$ теңдігі орындалады, ал (1.2.16)-шы теңсіздіктен $\tilde{v}^*(x,[t]) = \hat{\tilde{v}}(x,[t])$ теңдігі шығады. Теорема 1.2.1 дәлелденді.

Ескерту 1.2.1 *1.2.1 теорема шарттары орындалсын.* $\left\| \lambda^{(k)} - \lambda^{(0)} \right\|_3$, $\left\| \tilde{v}_r^{(k)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t) \right\|$ *және* $\left\| \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(0)} \right\|_2$ *шамалары келесі түрде бағаланады:*

$$\left\| \lambda^{(k)} - \lambda^{(0)} \right\|_3 \leq \left\| \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right\|_3 + \cdots + \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|_3 \leq$$

$$\leq (1 + q_\nu(h) + q_\nu^2(h) + \cdots + q_\nu^{k-1}(h)) \left\| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right\|_3 \leq$$

$$\leq \frac{1 - q_\nu^k(h)}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} \left\| \tilde{v}^{(0)} \right\|_2, \tag{1.2.18}$$

$$\left\| \tilde{v}_r^{(k)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t) \right\| \leq (e^{a_0(t-(r-1)h)} - 1) \left\| \lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\|,$$

$$\left\| \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(0)} \right\|_2 \leq (e^{a_0 h} - 1) \left\| \lambda^{(k)} - \lambda^{(0)} \right\|_3, \tag{1.2.19}$$

$t \in \Omega_r(x)$, $r = \overline{1,N}$, $k = 1,2,\ldots$.

(1.1.1), (1.1.2) және (1.1.6)-(1.1.9) есептерінің эквиваленттігінен келесі тұжырым орынды

Салдар 1.2.1 *1.2.1 теоремасының шарттары орындалсын. Онда* $\{v^{(k)}(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ *тізбегі (1.1.1), (1.1.2) есебінің* $v^*(x,t)$ *жалғыз шешіміне жинақталады және келесі бағалау орындалады:*

$\|v^*(x,t)\| \leq$

$$\leq he^{a_0h}\left(\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\frac{(a_0h)^\nu}{\nu!}\left((e^{a_0h}-1)\gamma_\nu(h)\,max\{1,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(a_0h)^j}{j!}\}+e^{a_0h}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\gamma_\nu(h)\,max\{1,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(a_0h)^j}{j!}\}+1\right)\right)max\{\|d\|_0,\|f\|_1\}. \qquad (1.2.20)$$

Дәлелдеуі. 1.2.1 теоремасының шарттарының орындалуынан (1.1.6)-(1.1.9) параметр енгізілген шеттік есебінің $(\lambda^*(x),\tilde{v}^*(x,[t]))$ жалғыз шешімі бар болады және (1.2.3), (1.2.4) бағалауы орындалады. Онда, (1.1.1), (1.1.2) және (1.1.6)-(1.1.9) есептерінің эквиваленттілігін қолданып, (1.1.1), (1.1.2) есебінің $v^*(x,t)$ шешімін $\{x\}\times[0,T]$ аралығында $(\lambda^*(x),\tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы арқылы келесі теңдіктермен анықтаймыз:

$$v^*(x,t)=\lambda_r^*(x)+\tilde{v}_r^*(x,[t]),\ t\in\Omega_r(x),\ r=\overline{1,N},$$

$$v^*(x,T)=\lambda_N^*(x)+\lim_{t\to rh-0}\tilde{v}^*(x,t)$$

Ендеше, $\lambda^*(x)$, $\tilde{v}^*(x,t)$ үшін

$$\|\lambda^*(x)\|\leq\left\|\lambda^*(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|+\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\|,$$

$$\|\tilde{v}^*(x,t)\|\leq\left\|\tilde{v}^*(x,t)-\tilde{v}^{(0)}(x,t)\right\|+\left\|\tilde{v}^{(0)}(x,t)\right\|$$

теңсіздіктері орындалады. Осы теңсіздіктерге (1.2.14), (1.2.15) бағалауларын, яғни

$$\left\|\lambda^*-\lambda^{(0)}\right\|_3\leq\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\frac{(a_0h)^\nu}{\nu!}\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2,$$

$$\left\|\tilde{v}^*-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2\leq(e^{a_0h}-1)\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\frac{(a_0h)^\nu}{\nu!}\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2, \qquad (1.1.21)$$

$(x,t)\in\Omega_r$ $(r=\overline{1,N})$ және (1.2.5), (1.2.7) қолдансақ, (1.2.20) бағалауын аламыз. Салдар 1.2.1 дәлелденді.

Салдар 1.2.2 *1.2.1 теоремасының шарттары орындалсын. Онда* $\{v^{(k)}(x,t)\}_{k=0}^{\infty}$ *тізбегі (1.1.1), (1.1.2) есебінің* $v^*(x,t)$ *жалғыз шешіміне жинақталады және келесі бағалау орындалады:*

$$\left\|v^* - v^{(0)}\right\|_1 \le \frac{\gamma_\nu(h)e^{a_0 h}}{1-q_\nu(h)} \cdot \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} \times$$

$$\times \left((e^{a_0 h} - 1) \max_{r=\overline{1,N+1}} \max_{x\in[0,\omega]} \left\|v^{(0)}(x,(r-1)h)\right\| + he^{a_0 h}\|f\|_1 \right) \qquad (1.2.22)$$

Дәлелдеуі. 1.2.1 теоремасының шарттарының орындалуынан (1.1.6)-(1.1.9) параметр енгізілген шеттік есебінің $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жалғыз шешімі бар болады және (1.2.3), (1.2.4) бағалауы орындалады. Онда, (1.1.1), (1.1.2) және (1.1.6)-(1.1.9) есептерінің эквиваленттілігін қолданып, (1.1.1), (1.1.2) есебінің $v^*(x,t)$ шешімін $\{x\} \times [0,T]$ аралығында $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы арқылы келесі теңдіктермен анықтаймыз:

$$v^*(x,t) = \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,[t]),\ t \in \Omega_r(x),\ r = \overline{1,N},$$

$$v^*(x,T) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t\to rh-0} \tilde{v}^*(x,t).$$

Ендеше, $(v^*(x,t) - v^{(0)}(x,t))$ айырымы үшін

$$\left\|v^* - v^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\|_3 + \left\|\tilde{v}_r^* - \tilde{v}_r^{(0)}\right\|_2,$$

теңсіздігі орындалады. Осы теңсіздікке (1.2.14), (1.2.15) бағалауларын қолдансақ, (1.2.22) бағалауын аламыз. Салдар 1.2.2 дәлелденді.

1.3 Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетінің қисынды шешімділігінің критерийлері

Анықтама 1.3.1 *(1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі қисынды шешілімді деп аталады, егер кез келген* $f(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$, $d(x) \in C([0,\omega], R^n)$ *үшін* $v(x,t)$ *жалғыз шешімі табылып және келесі бағалау орындалса*

$$\|v\|_1 \le K\, max\{\, \|d\|_0, \|f\|_1\},$$

мұндағы K – $f(x,t)$, $d(x)$ функцияларынан тәуелсіз тұрақты шама. K саны (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің қисынды шешімділігінің тұрақтысы деп аталады.

Келесі теңдеуді қарастырайық

$$\frac{1}{h} Q_*(x,h)\lambda(x) = -F_*(h,A,f,d,x), \qquad \lambda(x) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)}),$$

мұндағы $Q_*(x,h) = \lim_{\nu\to\infty} Q_\nu(x,h)$, $F_*(h,A,f,d,x) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{h} F_\nu(x,h)$.

Теорема 1.3.1 *Барлық* $x \in [0, \omega]$ *үшін (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі қисынды шешілімді болуы үшін кез келген* $h \in (0, h_0]: Nh = T$ *қадамына сәйкес* $\nu = \nu(h)$ *саны табылып,* $Q_\nu(x, h)$ *матрицасының* $(Q_\nu(x, h))^{-1}$ *кері матрицасы бар болатындай және*

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| \le \gamma_\nu(h), \tag{1.3.1}$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \left\{ e^{a_0 h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h)^j}{j!} \right\} < 1. \tag{1.3.2}$$

теңсіздіктері орындалатындай $h_0 \in (0, T]$ бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Жеткіліктілік. Кез келген $h \in (0, h_0]: Nh = T$ қадамына сәйкес $\nu = \nu(h)$ саны табылып(үшін), $(0, T]$ аралығынан қандай да бір h_0 саны бар болып, (1.3.1)-(1.3.2) теңсіздіктері орындалсын. (1.1.1), (1.1.2) және (1.1.6)-(1.1.9) есептерінің эквиваленттілігін қолданып, (1.1.1), (1.1.2) есебінің $v^*(x, t)$ шешімін $\{x\} \times [0, T]$ аралығында $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$ жұбы арқылы анықтайық:

$$v^*(x, t) = \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x, [t]), \;\; t \in \Omega_r(x), \;\; v^*(x, T) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t \to rh - 0} \tilde{v}^*(x, t),$$

$r = \overline{1, N}$. Онда,

$$\|\lambda^*(x)\| \le \left\|\lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x)\right\| + \left\|\lambda^{(0)}(x)\right\|,$$

$$\|\tilde{v}^*(x, t)\| \le \left\|\tilde{v}^*(x, t) - \tilde{v}^{(0)}(x, t)\right\| - \left\|\tilde{v}^{(0)}(x, t)\right\|,$$

(1.2.5), (1.2.7) және (1.2.14), (1.2.21) бағалауларынан (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің қисынды шешілімді болатындығы шығады.

Қажеттілік. (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі K тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын. Әрбір $\hat{x} \in [0, \omega]$ үшін (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі жәй дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есеп болып табылады:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{A}(t)\hat{v} + \hat{f}(t), \quad t \in (0, T), \quad \hat{v} \in R^n, \tag{1.3.3}$$

$$\hat{B}_1 \hat{v}(0) + \hat{B}_2 \hat{v}(T) = \hat{d}, \tag{1.3.4}$$

мұндағы $\hat{v}(t) = v(\hat{x}, t)$, $\hat{A}(t) = A(\hat{x}, t)$, $\hat{f}(t) = f(\hat{x}, t)$, $\hat{B}_1 = B_1(\hat{x})$, $\hat{B}_2 = B_2(\hat{x})$, $\hat{d} = d(\hat{x})$.

$f(x, t) = \hat{f}(t)$, $d(x) = \hat{d}$ үшін төмендегі бағалау орынды:

$$\|\hat{v}^*\|_1 = \max_{t \in \Omega_r(\hat{x})} \|v^*(\hat{x}, t)\| \le \max_{(x,t) \in [0,\omega] \times [0,T]} \|v^*(x, t)\| \le$$

$$\leq K\, max\{\, \|d\|_0, \|f\|_1\} = K\, max\{\, \|\hat{d}\|, \|\hat{f}\|_2\},$$

онда (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің қисынды шешілімділігінен әрбір $\hat{x} \in [0, \omega]$ үшін (1.3.3), (1.3.4) есебінің K тұрақтысымен қисынды шешілімділігі шығады.

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\frac{1}{a_0 h_0}(e^{a_0 h_0} - 1 - a_0 h_0) \leq \frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)}$$

теңсіздігін қанағаттандыратындай $h_0 \in (0, T]$ саны табылады.

Онда 3-ші теоремадан [27, 42 б.], барлық $h \in (0, h_0]: Nh = T$ үшін келесі бағалау орынды

$$\|(Q_*(\hat{x}, h))^{-1}\| \leq \frac{(1+\varepsilon)K}{h}.$$

Кез келген $x \in [0, \omega]$ үшін

$$\|(Q_*(x, h))^{-1}\| \leq \frac{(1+\varepsilon)K}{h}$$

теңсіздігі орындалады.

Келесі теңсіздік орындалатындай ν_1 санын таңдайық:

$$\frac{2(1+\varepsilon)K}{h}\left\{e^{a_0 h} - \sum_{j=0}^{\nu_1} \frac{(a_0 h)^j}{j!}\right\} < 1. \qquad (1.3.5)$$

Кез келген ν үшін

$$\|Q_*(x, h) - Q_\nu(x, h)\| \leq \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{(a_0 h)^j}{j!} = e^{a_0 h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h)^j}{j!}$$

теңсіздігі орынды, онда барлық $\nu \geq \nu_1$ үшін (1.3.5)-ке байланысты шенелген кері операторлардың аз ауытқулар теоремасы бойынша $Q_\nu(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар және

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| \leq \frac{\|(Q_*(x, h))^{-1}\|}{1 - \|(Q_*(x, h))^{-1}\| \cdot \|Q_*(x, h) - Q_\nu(x, h)\|} < \frac{2(1+\varepsilon)K}{h}$$

бағалауы орындалады. Осылайша, барлық $\nu \geq \nu_1$, $(0, h_0]$ аралығынан $Nh = T$

болатындай h саны және $x \in [0, \omega]$ үшін $\gamma_\nu(h) = \frac{2(1+\varepsilon)K}{h}$ деп алсақ, (1.3.1), (1.3.2) теңсіздіктері орындалады.

Теорема 1.3.1 дәлелденді.

Теорема 1.3.2 *Барлық $x \in [0, \omega]$ үшін (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі қисынды шешілімді болуы үшін кез келген ν санына сәйкес $Q_\nu(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасының кері $(Q_\nu(x, h))^{-1}$ матрицасы бар болатындай және (1.3.1), (1.3.2) теңсіздігі орындалатындай $h = h(\nu): Nh = T$ бар болуы қажетті және жеткілікті.*

Дәлелдеуі. Жеткіліктілік. Кез келген ν санына сәйкес $h = h(\nu): Nh = T$ саны бар болып, (1.3.1)-(1.3.2) теңсіздіктері орындалсын. 1.3.1-ші теореманың жеткіліктілік шартының дәлелдеуін қолдана отырып, (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің қисынды шешілімді болатындығын аламыз.

Қажеттілік. (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі K тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын. 1.3.1-ші теореманың дәлелдеуін қолдана отырып, берілген $\varepsilon > 0$ үшін $h_0 = h_0(\varepsilon)$ санын табамыз, сонда $(0, h_0]$ аралығынан $Nh = T$ болатындай барлық h және $x \in [0, \omega]$ үшін $Q_*(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасының $(Q_*(x, h))^{-1}$ кері матрицасы бар және

$$\|(Q_*(x, h))^{-1}\| \leq \frac{(1+\varepsilon)K}{h}$$

теңсіздігі орындалады.

Келесі қатынас орындалатындай $(0, h_0]$ аралығынан h_1 санын таңдайық:

$$\frac{2(1+\varepsilon)K}{h_1}\left\{e^{a_0 h_1} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h_1)^j}{j!}\right\} < 1. \qquad (1.3.6)$$

Онда,

$$\|(Q_*(x, h))^{-1}\| \cdot \|Q_*(x, h) - Q_\nu(x, h)\| < 0.5$$

орындалады. (1.3.6) теңсіздігін ескерсек, шенелген кері операторлардың аз ауытқулар теоремасы бойынша барлық $h \in (0, h_1]: Nh = T$ және $x \in [0, \omega]$ үшін келесі бағалау орынды

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| < \frac{2(1+\varepsilon)K}{h}.$$

$(0, h_1]$ аралығынан $Nh = T$ болатындай h таңдауына байланысты

$$\gamma_\nu(h) = \frac{2(1+\varepsilon)K}{h}$$

деп алсақ, онда (1.3.1), (1.3.2) теңсіздіктері орындалады. Теорема 1.3.2 дәлелденді.

Теорема 1.3.3 *Айталық, барлық* $h \in (0, h_0]: Nh = T$ *және* $x \in [0, \omega]$ *үшін кейбір* ν *санына сәйкес* $Q_\nu(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *матрицасының кері* $(Q_\nu(x, h))^{-1}$ *матрицасы бар болып және*

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{h} \tag{1.3.7}$$

теңсіздігі орындалатындай $h_0 = h_0(\nu)$ бар болсын, мұндағы γ – h және x -тен тәуелсіз тұрақты шама. Онда (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі $K = \gamma$ тұрақтысымен қисынды шешілімді болады.

Дәлелдеуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\frac{1}{a_0 h_0}(e^{a_0 h_0} - 1 - a_0 h_0) \leq \frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $h_0 \in (0, T]$ саны табылады.

Келесі теңсіздік орындалатындай $(0, h_0]$ аралығынан $Nh_1 = T$ болатын h_1 санын таңдайық:

$$\frac{\gamma}{h_1}\left\{e^{a_0 h_1} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h_1)^j}{j!}\right\} < 1. \tag{1.3.8}$$

Онда, $(0, h_1]$ аралығынан $Nh = T$ болатын барлық h үшін

$$q_\nu(h) \leq q_\nu(h_1) < 1$$

теңсіздігі орындалады. Демек, 1.2.2-ші салдар бойынша (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің $v^*(x, t)$ жалғыз шешімі бар және

$$\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]} \|v^*(x, t)\| \leq e^{a_0 h}\left(\left(\frac{\gamma}{1 - q_\nu(h)} \cdot \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{e^{a_0 h} - 1}{h} + 1\right) \times\right.$$

$$\left. \times \gamma max\left\{1, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(a_0 h)^j}{j!}\right\} + \frac{\gamma}{1 - q_\nu(h)} \frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!} e^{a_0 h}\right) max\{\|d\|_0, \|f\|_1\} + h e^{a_0 h}\|f\|_1$$

теңсіздігі орындалады. Соңғы теңсіздікте $h \to 0$ шекке көшсек,

$$\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]} \|v^*(x, t)\| \leq \gamma\, max\{\|d\|_0, \|f\|_1\}$$

бағалауы орынды. Теорема 1.3.3 дәлелденді.

Теорема 1.3.4 *Айталық, (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебі K тұрақтысымен қисынды шешілімді болсын. Онда кез келген* ν, $\varepsilon > 0$ *сандарына сәйкес* $h_0 = h_0(\nu, \varepsilon)$ *табылады, барлық* $h \in (0, h_0]: Nh = T$ *және* $x \in [0, \omega]$ *үшін* $Q_\nu(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *матрицасының* $(Q_\nu(x, h))^{-1}$ *кері матрицасы бар болады да,*

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| \le \frac{(1+\varepsilon)K}{h} \tag{1.3.9}$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі. $(0, h_1]$ аралығынан $Nh = T$ болатындай барлық h саны және $x \in [0, \omega]$ үшін $Q_*(x, h): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар және келесі теңсіздік

$$\|(Q_*(x, h))^{-1}\| \le \frac{(2+\varepsilon)K}{2h}$$

орындалатындай берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін $h_0 = h_0(\varepsilon)$ табамыз. Келесі теңсіздікті қанағаттандыратындай $(0, h_0]$ аралығынан h_1 санын таңдайық:

$$\frac{(2+\varepsilon)K}{h_1}\left\{e^{a_0 h_1} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h_1)^j}{j!}\right\} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{1.3.10}$$

Сонда,

$$\|(Q_*(x, h))^{-1}\| \cdot \|Q_*(x, h) - Q_\nu(x, h)\| < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

болғандықтан және (1.3.6)-ші теңсіздікті ескерсек, шенелген кері операторлардың аз ауытқулар теоремасы бойынша $(0, h_1]$ аралығынан $Nh = T$ болатындай барлық h және $x \in [0, \omega]$ үшін

$$\|(Q_\nu(x, h))^{-1}\| < \frac{(1+\varepsilon)K}{h} = \gamma_\nu(h)$$

теңдігі орынды. Және, (1.3.6) бағалауының негізінде келесі теңсіздік орындалады

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h)\{e^{a_0 h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(a_0 h)^j}{j!}\} < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < 1.$$

Онда, 1.2.1-ші салдар бойынша, (1.1.1), (1.1.2) шеттік есебінің $v^*(x, t)$ жалғыз шешімі бар және келесі бағалау орынды:

$$\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]}\|v^*(x,t)\| \le e^{a_0 h}\left(\left(\frac{(1+\varepsilon)K}{1-q_\nu(h)}\cdot\frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{e^{a_0 h}-1}{h}+1\right)(1+\varepsilon)K\times\right.$$

$$\left.\times\, max\{1,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(a_0 h)^j}{j!}\}+\frac{(1+\varepsilon)K}{1-q_\nu(h)}\frac{(a_0 h)^\nu}{\nu!}e^{a_0 h}\right) max\{\|d\|_0,\|f\|_1\}+he^{a_0 h}\|f\|_1,$$

осыдан, $h \to 0$

$$\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]}\|v^*(x,t)\| \le (1+\varepsilon)K\, max\{\|d\|_0,\|f\|_1\}$$

бағалауы орындалады. Теорема 1.3.4 дәлелденді.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІ

2.1 Сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есеп

Сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетін қарастырамыз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in [0,\omega] \times (0,T), \tag{2.1.1}$$

$$g\big(x, v(x,0), v(x,T)\big) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{2.1.2}$$

мұндағы $(n \times n)$ -матрица $A(x,t)$ үзіліссіз матрица, n -вектор-функция $F(x,t)$ - $[0,T]$ -да үзіліссіз, x – әулет параметрі, $g: [0,\omega] \times R^n \times R^n \to R^n$ – үзіліссіз функция, $\|A\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in(0,T)} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{ij}(x,t)\right| \le a_0$ $(a_0 - const)$, $\|v(x,t)\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in(0,T)} |v_i(x,t)|$.

Анықтама 2.1.1 *(2.1.1), (2.1.2) есебінің шешімі деп* $t \in [0,T]$ *бойынша үзіліссіз дифференциалданатын әрбір* $x \in [0,\omega]$ *үшін (2.1.1) дифференциалдық теңдеуді және (2.1.2) шеттік шартын қанағаттандыратын* $v^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^{nN})$ *функциясы аталады.*

$x -$ $[0,\omega]$-да кейбір бекітілген параметр болсын. N $(N = 1,2,\ldots)$ натурал сан таңдаймыз, $[0,T]$ кесіндісін нүктелермен бөлеміз $t_p = p \cdot h$, $p = \overline{0,N}$, $h = T/N$.

Есептің қойылымы. *(2.1.1), (2.1.2) есебінің шешімін табу алгоритмдерін жасау және оларды тестілік есептерде жүзеге асыру.*

Белгілеулерді енгіземіз:

$\Omega_r(x) = \{(x,t): x \in [0,\omega], t \in [t_{r-1}, t_r]\}, r = \overline{1,N};$

$$\Delta_N(x): \{x\} \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x);$$

$\lambda_r(x) = v(x, t_{r-1}), r = \overline{1,N},\ \lambda_{N+1}(x) = \lim\limits_{t\to t_N-0} v(x,t);$

$\tilde{v}_r(x,t) = v(x,t) - \lambda_r(x), t \in \Omega_r(x), r = \overline{1,N};$

$C([0,\omega] \times [0,T], \Delta_N(x), R^{nN})$ - нормасы

$$\|v\|_2 = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{r=\overline{1,N}} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t\in\Delta_N(x)} \left|v_{r,i}(x,t)\right|$$

болатын $v(x,[t]) = (v_1(x,t), v_2(x,t), \dots, v_N(x,t))$ функциялар жүйелерінің кеңістігі, мұндағы $v_r(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ үзіліссіз функциялар және әрбір $x \in [0,\omega]$ қатысты бірқалыпты $\lim\limits_{t \to t_r - 0} v_r(x,t)$ ақырлы шегі бар ($r = \overline{1,N}$).

(2.1.1), (2.1.2) есебі параметр енгізілген шеттік есепке эквивалентті

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\lambda_r(x) + \tilde{v}_r) + F(x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{2.1.3}$$

$$\tilde{v}_r(x, t_{r-1}) = 0, \tag{2.1.4}$$

$$g(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) = 0, \tag{2.1.5}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \to t_r - 0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0\,, r = \overline{1,N} \tag{2.1.6}$$

мұндағы (2.1.6)- шешімнің $\Delta_N(x)$ ішкі нүктелеріндегі үзіліссіздік шарттары. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ арқылы элементтері $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{N+1}^*(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$, $\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t), \tilde{v}_2^*(x,t) \dots \tilde{v}_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T]$, $\Delta_N(x), R^{nN})$ болатын жұпты белгілейміз. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x,t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (2.1.3)-(2.1.4) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r^*(x) + \lim\limits_{t \to rh - 0} \tilde{v}_r^*(x,t)$ (2.1.5), (2.1.6) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 2.1.2 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ *жұбын (*2.1.3*)- (*2.1.6*) есебінің шешімі деп айтамыз.*

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы (2.1.3)-(2.1.6) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad x \in [0,\omega], \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (2.1.1), (2.1.2) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес шешімі болады.

Керісінше, $\hat{v}(x,t)$ функциясы (2.1.1)-(2.1.2) есебінің шешімі болсын.

Белгілеулер енгізейік:

$\hat{\lambda}(x) = (\hat{\lambda}_1(x), \hat{\lambda}_2(x), \dots, \hat{\lambda}_{N+1}(x))$, $\hat{\tilde{v}}(x,[t]) = (\hat{\tilde{v}}_1(x,t), \hat{\tilde{v}}_2(x,t), \dots \hat{\tilde{v}}_N(x,t))$, мұндағы

$\hat{\lambda}_r(x) = \hat{v}(x,(r-1)h), \quad r = \overline{1,N},$

$\hat{\lambda}_{N+1}(x) = \hat{v}(x,T),$

$\hat{\tilde{v}}_r(x,t) = \hat{v}(x,t) - \hat{v}(x,(r-1)h), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}.$

Онда, (2.1.1)-(2.1.2) және (2.1.3)-(2.1.6) есептерінің эквиваленттілігінен

$(\hat{\lambda}(x), \hat{\hat{v}}(x,[t]))$ жұбы (2.1.3)-(2.1.6) есебінің шешімі болады.

Келесі сызықтық операторды қарастырамыз [116, 145 б.]

$$\Phi_r(x,t) = I + \int_{t_{r-1}}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty} \int_{t_{r-1}}^{t} A(x,\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(x,\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(x,\tau_j)d\tau_j \dots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N},$$

мұндағы I - $(n \times n)$ өлшемді бірлік матрица.

$\Phi_r(x,t)$ операторы

$$\frac{\partial \Phi_r(x,t)}{\partial t} = A(x,t)\Phi_r(x,t), \quad \Phi_r(x,t_{r-1}) = I, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (2.1.7)$$

есебін қанағаттандырады. Келесі белгілеулерді қолданамыз

$$a_r(P,x,t) = \Phi_r(x,t) \int_{t_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(x,\xi)P(x,\xi)d\xi\,, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (2.1.8)$$

$a_r(P,x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial a_r(P,x,t)}{\partial t} = A(x,t) \cdot a_r(P,x,t) + P(x,t), \quad a_r(P,x,t_{r-1}) = 0,$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N} \qquad (2.1.9)$$

Коши есебін қанағаттандырады.

Параметр $\lambda_r(x) \in C([0,\omega], R^n)$ $(r = \overline{1,N})$ қатысты (2.1.3), (2.1.4) Коши есебінің шешімдер әулетін жазамыз

$$v_r(x,t) = a_r(A,x,t)\lambda_r(x) + a_r(F,x,t), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \qquad (2.1.10)$$

және $v(x,[t]) = (v_1(x,t), v_2(x,t), \dots, v_N(x,t))$ функциялар жүйесін құрамыз.

(2.1.10) теңдіктен $\lim\limits_{t \to t_r - 0} v_r(x,t), r = \overline{1,N}$ шектерін анықтап, (2.1.5)-ді T/N -ге көбейтіп, (2.1.5) және (2.1.6)-шы теңдіктерге қоямыз. Сонымен, белгісіз $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{N+1}(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$ параметрге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін құрып аламыз:

$$Q_{*,\Delta_N(x)}\big(x,\lambda(x)\big)=0, \tag{2.1.11}$$

мұндағы $Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda(x))$ операторы келесі түрде анықталады:

$$Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda(x))=\begin{pmatrix} h\cdot g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)) \\ (I+a_1(A,x,t_1))\lambda_1-\lambda_2+a_1(F,x,t_1) \\ (I+a_2(A,x,t_2))\lambda_2-\lambda_3+a_2(F,x,t_2) \\ \dots \\ (I+a_N(A,x,t_N))\lambda_N-\lambda_{N+1}+a_N(F,x,t_N) \end{pmatrix}$$

(2.1.11)-ші теңдеулер жүйесі сызықтық емес болғандықтан, итерациялық үдерістерді пайдаланып шешеміз.

Ол үшін қарастырып отырған есептің шешімі бар және жалғыздығын қамтамасыз ететін жиынды құрып аламыз. Яғни, алдымен $\lambda^0(x)=\ (\lambda_1^0(x),\lambda_2^0(x),\dots,\lambda_{N+1}^0(x))\in C([0,\omega],R^{n(N+1)})$ векторын және $\rho_\lambda>0$, $\rho_v>0$ сандарын таңдаймыз да келесі жиындарды құрамыз:

$$S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)=\big\{\lambda(x)\in C([0,\omega],R^{n(N+1)}):\|\lambda-\lambda^0\|_3<\rho_\lambda\big\},$$

$$G^0(x,\rho_\lambda)=\{(x,w_1,w_2)\in[0,\omega]\times R^n\times R^n:$$

$$x\in[0,\omega],\|w_1-\lambda_1^0(x)\|<\rho_\lambda,\|w_2-\lambda_{N+1}^0(x)\|<\rho_\lambda\}.$$

Шарт 2.1.1 $g(x,w_1,w_2)$ *функциясы және оның* $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}$, $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}$ *дербес туындылары* $G^0(x,\rho_\lambda)$ *жиынында бірқалыпты үзіліссіз,* $n\times n$ *өлшемді*

$$\widetilde{M}_N(x)=h\cdot\frac{\partial g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))}{\partial w_1}+$$

$$+h\cdot\frac{\partial g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))}{\partial w_2}\cdot\prod_{r=N}^{1}(I+a_r(A,x,t_r))$$

матрицасының барлық $\lambda(x)\in S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ үшін кері матрицасы бар және кез келген $x\in[0,\omega]$ үшін төмендегі теңсіздіктер орындалады

$$\left\|\frac{\partial g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))}{\partial w_1}\right\|\le L_1,\quad \left\|\frac{\partial g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))}{\partial w_2}\right\|\le L_2,\quad x\in[0,\omega],$$

мұндағы L_1, L_2 - тұрақты шамалар.

$\lambda(x)$ параметрге қатысты (2.1.11) теңдеудің шешімін табу үшін 1-ші теореманың [28] жалпыламасы болып табылатын тұжырымды қолданамыз.

Теорема 2.1.1 *Әрбір* $x \in [0,\omega]$ *үшін 2.1.1-ші шарт және келесі шарттар орындалсын:*

(*i*) $\frac{\partial Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}: R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ Якоби матрицасы $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз;

(*ii*) $\frac{\partial Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}: R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ Якоби матрицасының барлық $\lambda(x) \in S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ үшін шенелген кері матрицасы бар және

$$\left\|\left(\frac{\partial Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \gamma, \quad \gamma - const;$$

(*iii*) $\gamma \cdot \left\|Q_{*,\Delta_N(x)}(x,\lambda^0(x))\right\| < \rho_\lambda$.

Онда кез келген $\alpha_0 \geq 1$, $\alpha_1 \geq \alpha_0$ *саны табылып,*

$$\lambda^{(0)}(x) \quad = \lambda^0(x),$$

$$\lambda^{(p+1)}(x) = \lambda^{(p)}(x) - \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial Q_{*,\Delta_N(x)}\left(x,\lambda^{(p)}(x)\right)}{\partial\lambda}\right)^{-1} \cdot Q_{*,\Delta_N(x)}\left(x,\lambda^{(p)}(x)\right),$$

$$p = 0,1,2,\ldots, \qquad (2.1.12)$$

итерациялық процеспен анықталатын $\{\lambda^{(p)}(x)\}_{p=0}^{\infty}$ *тізбегі* $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ *жиынына тиісті болады, (2.1.11)-ші теңдеудің шешімі* $\lambda^*(x)$*-ға жинақталады,* $\lambda^*(x) \in S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ *және келесі бағалау орындалады*

$$\|\lambda^* - \lambda^0\|_3 \leq \gamma \cdot \left\|Q_{*,\Delta_N(x)}\left(x,\lambda^0(x)\right)\right\|. \qquad (2.1.13)$$

Сонымен қатар, (2.1.11)-ші теңдеудің кез-келген шешімі $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ *жиынында оқшауланған болады.*

Бұл тұжырым Адамар теоремасының локалды нұсқасының күшейтілуінің [28] дербес жағдайы болып табылады.

2.2 Сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімін табудың сандық әдісі

Енді (2.1.1), (2.1.2) параметрі бар сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепті шешудің сандық әдісі ұсынылады.

1) Әрбір бекітілген x үшін $[t_{r-1},t_r]$ кесіндісін тең M бөлікке бөлеміз

$(M = 1,2,\dots)$ және (2.1.9) Коши есебінің сандық шешімін $t_{r,k} = t_{r-1} + k \cdot \frac{t_r - t_{r-1}}{M}$ $(r = \overline{1,N},\, k = \overline{1,M})$ нүктелерінде анықтаймыз.

2) $\lambda^0(x)$ параметрге қатысты (2.1.11)-ші сызықтық емес теңдеулер жүйесін құрамыз.

3) $Q_{*,\Delta_N(x)}(x, \lambda^0(x)) \neq 0$ орындалатын $\lambda^0(x) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$ векторын таңдаймыз және (2.1.11) теңдеудің $\lambda^*(x)$ шешімін табу үшін (2.1.12)-ші итерациялық процессті қолданамыз.

4) $Q_{*,\Delta_N(x)}(x, \lambda^{(p)}(x)) = 0,\, p = 1,2,\dots$ орындалатын $\lambda^{(p)}(x)$ анықтаймыз.

5) (2.1.9) Коши есептерінің сандық шешімдерін қолдана отырып, (2.1.10) теңдік бойынша $v_r(x, t_{r,k})$ мәндерін табамыз $(r = \overline{1,N},\, k = \overline{1,M})$.

(2.1.1), (2.1.2) есебінің сандық шешімі

$$v(x,\hat t) = \begin{cases} \lambda_1^{(p)}(x) + \tilde v_1(x,\hat t), & \text{егер} \quad \hat t = k\dfrac{t_1 - t_0}{M}, \qquad k = \overline{1,(M-1)}, \\ \lambda_2^{(p)}(x) + \tilde v_2(x,\hat t), & \text{егер} \quad \hat t = t_1 + k\dfrac{t_2 - t_1}{M}, \qquad k = \overline{1,(M-1)}, \\ \qquad\qquad \dots & \\ \lambda_N^{(p)}(x) + \tilde v_N(x,\hat t), & \text{егер} \quad \hat t = t_{N-1} + k\dfrac{t_N - t_{N-1}}{M}, k = \overline{1,(M-1)}, \\ \lambda_{N+1}^{(p)}(x), & \text{егер} \quad \hat t = t_N, \end{cases}$$

$$x \in [0,\omega].$$

Осылайша, (2.1.1), (2.1.2) есебінің сандық шешімін табу (2.1.3)-(2.1.6) параметрі бар сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетінің сандық шешімін табу үшін келтірілді. Қойылған есептің сандық шешімін табудың ұсынылған әдісі - бұл Коши есептерінің шешімдерін табу процедураларының тиімді үйлесімі және әулет параметрінің әрбір бекітілген мәніндегі параметрі бар сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу.

Қойылған есептің сандық шешімін табудың ұсынылған әдісіне мысалдар қарастырайық.

Мысал 1.

Параметрі бар сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in [0,\omega] \times (0,T), \tag{2.2.1}$$

$$g\big(x, v(x,0), v(x,T)\big) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2.2}$$

мұндағы x - әулеттің параметрі, $\omega = 0.25$, $T = 0.5$,

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} 2x+2 & x-1 \\ 3x+3 & x-2 \end{pmatrix},$$

$$F(x,t)=\begin{pmatrix} -(2x^2+3x+3)t^2-(2x^3+3x^2-4x-1)t-2x^3-x^2 \\ -(3x^2+5x+5)t^2-(3x^3+4x^2-3x+4)t-3x^3-3x^2+x-1 \end{pmatrix},$$

$$g\left(x,\begin{pmatrix} v_1(x,0) \\ v_2(x,0) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1(x,T) \\ v_2(x,T) \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_1(x,0)v_2(x,T)-v_2(x,0)v_1(x,T)-\frac{1}{16}x^2(2x-3) \\ v_1(x,0)v_2(x,T)+\frac{1}{2}v_2(x,0)v_1(x,T)-\frac{1}{4}x^2(2x-3) \end{pmatrix},$$

немесе

$$g(x,w_1,w_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}w_{1,1}w_{2,2}-w_{1,2}w_{2,1}-\frac{1}{16}x^2(2x-3) \\ w_{1,1}w_{2,2}+\frac{1}{2}w_{1,2}w_{2,1}-\frac{1}{4}x^2(2x-3) \end{pmatrix},$$

(2.2.1) есебінің $(x,t)\in[0,0.25]\times[0,0.5]$ облысында дәл шешімі

$$v^*(x,t)=\begin{pmatrix} (x+1)t^2+(t+1)x^2 \\ (x+1)t^2 \end{pmatrix}$$

болады. Функцияның $v(x,t)=\lambda_1(x)+\tilde{v}(x,t)$ алмастырылуын орындаймыз:

$$\tilde{v}(x,t)=\Phi(x,t)\int_0^t \Phi^{-1}(x,\tau)A(x,\tau)\lambda_1(x)d\tau+\Phi(x,t)\int_0^t \Phi^{-1}(x,\tau)F(x,\tau)d\tau,$$

$$(x,t)\in[0,0.25]\times[0,0.5]$$

$A(x,t)$ матрицаның меншікті мәндері $det(A(x,t)-\mu(x)E)=0$ теңдеуінен анықталады:

$$\mu(x)=\begin{pmatrix} \frac{3x}{2}+\frac{\sqrt{13x^2+8x+4}}{2} \\ \frac{3x}{2}-\frac{\sqrt{13x^2+8x+4}}{2} \end{pmatrix},\quad x\in[0,0.25].$$

Онда, фундаменталды $\Phi(x,t)$ матрицасы

$\Phi(x,t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{13x^2+8x+4}}\left(\left(\frac{3x}{2}+\frac{\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)exp\left(\frac{3xt}{2}-\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3x}{2}-\frac{\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)exp\left(\frac{3xt}{2}+\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)\right)\cdot E+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{13x^2+8x+4}}\left(exp\left(\frac{3xt}{2}+\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-exp\left(\frac{3xt}{2}-\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)\right)\cdot A(x,t)$$

болады. Ықшамдаулар жасап $\Phi(x,t)$ матрицасын келесі түрде жазамыз

$$\Phi(x,t) = \frac{2e^{\frac{3xt}{2}}}{\sqrt{13x^2+8x+4}}\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}cosh\left(\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3x}{2}sinh\left(\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)\right)\cdot E+sinh\left(\frac{t\sqrt{13x^2+8x+4}}{2}\right)\cdot A(x,t)\right),$$

Әрбір x үшін параметрлерге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесі әулетін $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))=0$ құрып аламыз, мұндағы

$$Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) = \begin{pmatrix} g(x,\lambda_1(x),\lambda_2(x)) \\ \lambda_1(x)+\tilde{v}(x,T)-\lambda_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{1,1}_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) \\ Q^{1,2}_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) \\ Q^{2,1}_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) \\ Q^{2,2}_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))\end{pmatrix},$$

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1(x)\\ \lambda_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}(x)\\ \lambda_{1,2}(x)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\lambda_{2,1}(x)\\ \lambda_{2,2}(x)\end{pmatrix}\end{pmatrix} \in R^4.$$

Ескерту 2.2.1 $\lambda_1(x)=v(x,0)$, $\lambda_2(x)=v(x,0.5)$ *белгілеулері қолданылады.*
Бұл $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))$ операторының Якоби матрицасы

$$\frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_{2,2}(x) & -\lambda_{2,1}(x) & -\lambda_{1,2}(x) & \frac{1}{4}\lambda_{1,1}(x) \\ \lambda_{2,2}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{2,1}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{1,2}(x) & \lambda_{1,1}(x) \\ 1+a_1^{1,1}(x,T) & a_1^{1,2}(x,T) & -1 & 0 \\ a_1^{2,1}(x,T) & 1+a_1^{2,2}(x,T) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

түрінде анықталады.

$\lambda^0(x)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ векторын алып, $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))=0$ сызықтық емес алгебралық теңдеулер жүйесін итерациялық үдерістерді пайдаланып шешеміз:

$$\lambda^{(p+1)}(x)=\lambda^{(p)}(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}\left(x,\lambda^{(p)}(x)\right)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\cdot Q_{*,\Delta_1(x)}\left(x,\lambda^{(p)}(x)\right),$$

$$p=0,1,2,\dots$$

Біз 30-шы итерацияда $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x))$ векторды таптық. $\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x)$ функциялардың мәндері $x_i=0.025(i-1)$ $(i=\overline{1,11})$ нүктелерінде 1-ші кестеде келтірілген.

Кесте 1 – $x_i=0.025(i-1)$ $(i=\overline{1,11})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0)}(x)$, $\lambda_2^{(0)}(x)$ функциялардың мәндері

i	x_i	$\lambda_{1,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{1,2}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,2}^{(0)}(x_i)$
1	0.000	0.00000	0.00000	0.25000	-0.75000
2	0.025	0.00063	0.00000	0.25719	-0.73750
3	0.050	0.00250	0.00000	0.26625	-0.72500
4	0.075	0.00563	0.00000	0.27719	-0.71250
5	0.100	0.01000	0.00000	0.29000	-0.70000
6	0.125	0.01562	0.00000	0.30469	-0.68750
7	0.150	0.02250	0.00000	0.32125	-0.67500
8	0.175	0.03062	0.00000	0.33969	-0.66250
9	0.200	0.04000	0.00000	0.36000	-0.65000
10	0.225	0.05062	0.00000	0.38219	-0.63750
11	0.250	0.06250	0.00000	0.40625	-0.62500

Кесте 2 – $x_i = 0.025(i-1)$ $(i=\overline{1,11})$ нүктелеріндегі $Q_{*,\Delta_1}(x,\lambda(x))$ функциялардың мәндері

x	$Q^{1,1}_{*,\Delta_1}(x,\lambda^{(30)}(x))$	$Q^{1,2}_{*,\Delta_1}(x,\lambda^{(30)}(x))$	$Q^{2,1}_{*,\Delta_1}(x,\lambda^{(30)}(x))$	$Q^{2,2}_{*,\Delta_1}(x,\lambda^{(30)}(x))$
0.000	-2.403E-26	-5.060E-25	-1.397E-09	-3.260E-09
0.025	-1.780E-13	-7.122E-13	-1.386E-09	-3.238E-09
0.050	4.268E-13	1.707E-12	-1.377E-09	-3.221E-09
0.075	4.268E-12	1.707E-11	-1.371E-09	-3.209E-09
0.100	1.439E-11	5.757E-11	-1.367E-09	-3.201E-09
0.125	3.695E-11	1.478E-10	-1.367E-09	-3.200E-09
0.150	8.860E-11	3.544E-10	-1.371E-09	-3.206E-09
0.175	2.199E-10	8.797E-10	-1.379E-09	-3.218E-09
0.200	6.308E-10	2.523E-09	-1.393E-09	-3.239E-09
0.225	2.632E-09	1.053E-08	-1.412E-09	-3.269E-09
0.250	4.446E-08	1.779E-07	-1.437E-09	-3.309E-09

2-ші кестеден 30-шы итерацияда табылған $\lambda(x)$ параметрін $Q_{*,\Delta_1}(x,\lambda(x)) = 0$ тендеуін 10^{-7} дәрежесінен аспайтын дәлдікпен анықталған шешімі деп қабылдауға болатынын көреміз.

Осы екі кестеден төмендегі бағалаудың орындалатынын көреміз:

$$\max_{i=0,10}\left\|\begin{pmatrix}\lambda_1(0.025i)\\ \lambda_2(0.025i)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1^*(0.025i,0)\\ v_2^*(0.025i,0)\end{pmatrix}\right\| \le 0.0000010668$$

Енді $\tilde{v}(x_i,t)$ функциясы

$$\tilde{v}(x_i,t) = \Phi(x_i,t)\int_0^t \Phi(x_i,\tau)A(x_i,\tau)d\tau\cdot\lambda_1(x_i) + \Phi(x_i,t)\int_0^t \Phi(x_i,\tau)F(x_i,\tau)d\tau,$$

$$t\in[0{,}0.5],$$

түрінде жазылады, мұндағы ($x_i = 0.025i,\quad i = 0,1,2,\dots,10$). Ендеше төмендегі бағалау орындалатынына көз жеткіземіз:

$$\max_{j=0,20}\max_{i=0,10}\|\lambda(0.025i)+\tilde{v}(0.025i,0.05j)-v^*(0.025i,0.05j)\| \le 0.0000010683$$

Сонымен, $\lambda(x)$ параметрі $x_i = 0.025i$ $(i=0,1,2,\dots,10)$ нүктелерінде $\delta_0 = 1.1\cdot10^{-6}$ дәлдігімен анықталғанда, қарастырылып отырған тестілік (2.2.1), (2.2.2) сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімі $\delta_1 = 1.1\cdot10^{-6}$ дәлдігімен анықталады.

Бұл есепте $A(x,t)$ матрицасы тек x -тен тәуелді болғандықтан $\Phi(x,t)$

фундаменталды матрицасы айқын түрде жазылды. Егер $A(x,t)$ матрицасы x -тен де, t -дан да тәуелді болса, онда $\Phi(x,t)$ матрицасының әрбір бекітілген (x,t) жұбына сәйкес сандық мәнін анықтай аламыз. Осыған орай келесі мысалды қарастырамыз.

Мысал 2.

Келесі түрдегі параметрі бар сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепті қарастырайық

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{2.2.3}$$

$$g\left(x, v(x,0), v\left(x, \frac{1}{2}\right)\right) = 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \tag{2.2.4}$$

мұндағы x - әулеттің параметрі,

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} 2x+2t & x-1 \\ 3x+3(t+1) & x-2t \end{pmatrix}, \qquad F(x,t) = \begin{pmatrix} F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(x,t) = -2(x+1)t^3 - (4x^2+x+1)t^2 - (2x^3+3x^2-4x-1)t - 2x^3 + x^2$$

$$F_2(x,t) = -(3x+5)t^3 - (6x^2+3x+5)t^2 - (3x^3+7x^2-x+2)t - 3x^3 -$$

$$-3x^2 + x - 1$$

$$g\left(x, \begin{pmatrix} v_1(x,0) \\ v_2(x,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(x,T) \\ v_2(x,T) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} v_1(x,0)v_2(x,T) - v_2(x,0)v_1(x,T) - \frac{1}{16}x^2(2x-3) \\ v_1(x,0)v_2(x,T) + \frac{1}{2} v_2(x,0)v_1(x,T) - \frac{1}{4}x^2(2x-3) \end{pmatrix},$$

немесе

$$g(x, w_1, w_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} w_{1,1}w_{2,2} - w_{1,2}w_{2,1} - \frac{1}{16}x^2(2x-3) \\ w_{1,1}w_{2,2} + \frac{1}{2} w_{1,2}w_{2,1} - \frac{1}{4}x^2(2x-3) \end{pmatrix},$$

(2.2.3) есебінің $(x,t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$ облысындағы дәл шешімі

$$v^*(x,t) = \begin{pmatrix} (x+1)t^2 + (t+1)x^2 \\ (x-1)t - t^2 \end{pmatrix}$$

болады. (2.1.10) теңдеуін ескерсек

$$\tilde{v}(x,t) = a_1(A,x,t) \cdot \lambda_1(x) + a_1(F,x,t)$$

болады.

Енді, $a_1(A,x,t)$, $a_1(F,x,t)$ функцияларын қарастырып отырған аралықты белгілі бір қадаммен бөліп анықтап алғаннан соң, әрбір x үшін параметрлерге қатысты $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) = 0$ сызықтық емес теңдеулер жүйесі әулетін құрып аламыз. Мұндағы

$$Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) = \begin{pmatrix} g\big(x,\lambda_1(x),\lambda_2(x)\big) \\ \lambda_1(x) + a_1(A,x,T)\lambda_1(x) + a_1(F,x,T) - \lambda_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(x) \\ \lambda_{1,2}(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{2,1}(x) \\ \lambda_{2,2}(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in R^4$$

және $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))$ операторының Якоби матрицасы

$$\frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_{2,2}(x) & -\lambda_{2,1}(x) & -\lambda_{1,2}(x) & \frac{1}{4}\lambda_{1,1}(x) \\ \lambda_{2,2}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{2,1}(x) & \frac{1}{2}\lambda_{1,2}(x) & \lambda_{1,1}(x) \\ 1 + a_1^{1,1}(x,T) & a_1^{1,2}(x,T) & -1 & 0 \\ a_1^{2,1}(x,T) & 1 + a_1^{2,2}(x,T) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

болады.

Бұл мысалда да $\lambda_1(x) = v(x,0)$, $\lambda_2(x) = v(x,\frac{1}{2})$ белгілеулері қолданылады.

$\lambda^0(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ векторын алып, $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x)) = 0$ сызықтық емес теңдеулер жүйесін итерациялық үдерістерді пайдаланып шешеміз:

$$\lambda^{(p+1)}(x) = \lambda^{(p)}(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{*,\Delta_1(x)}\big(x,\lambda^{(p)}(x)\big)}{\partial \lambda}\right)^{-1} \cdot Q_{*,\Delta_1(x)}\big(x,\lambda^{(p)}(x)\big),$$
$$p = 0,1,2,\ldots$$

Сонда, 30-шы итерациядағы $x_i = \frac{1}{40}(i-1)$ $(i = \overline{1,11})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x)$ функцияларының мәндерін 3-ші кестеден көреміз.

Кесте 3 – $x_i = \frac{1}{40}(i-1)$ $(i = \overline{1,11})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0)}(x)$, $\lambda_2^{(0)}(x)$ функциялардың мәндері

i	x_i	$\lambda_{1,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{1,2}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,2}^{(0)}(x_i)$
1	0.000	0.00000	0.00000	0.25000	-0.75000
2	0.025	0.00063	0.00000	0.25719	-0.73750
3	0.050	0.00250	0.00000	0.26625	-0.72500
4	0.075	0.00563	0.00000	0.27719	-0.71250
5	0.100	0.01000	0.00000	0.29000	-0.70000
6	0.125	0.01563	0.00000	0.30469	-0.68750
7	0.150	0.02250	0.00000	0.32125	-0.67500
8	0.175	0.03063	0.00000	0.33969	-0.66250
9	0.200	0.04000	0.00000	0.36000	-0.65000
10	0.225	0.05062	0.00000	0.38219	-0.63750
11	0.250	0.06250	0.00000	0.40625	-0.62500

Бұл кестеден

$$\max_{i=\overline{0,10}} \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) \\ \lambda_2\left(\frac{i}{40}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^*\left(\frac{i}{40}, 0\right) \\ v_2^*\left(\frac{i}{40}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \right\| \leq 0.0000000906$$

бағалаудың орындалатынын көреміз.

Енді $\tilde{v}(x,t)$ функциясы $x = \frac{i}{40}$ $(i = 0,1,2,\ldots,10)$ нүктелерінде әрбір $t \in [0, \frac{1}{2}]$ үшін келесі түрде анықталады

$$\tilde{v}\left(\frac{i}{40}, t\right) = a_1\left(A, \frac{i}{40}, t\right) \cdot \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) + a_1\left(F, \frac{i}{40}, t\right).$$

Кейбір $x_i = \frac{1}{40}(i-1)$ $(i = \overline{1,11})$, $t_j = \frac{1}{40}(j-1)$ $(j = \overline{1,21})$ нүктелеріндегі $\hat{v}(x,\hat{t}) = \begin{pmatrix} \hat{v}_1(x,\hat{t}) \\ \hat{v}_2(x,\hat{t}) \end{pmatrix}$ функцияларының мәндерін 4-ші кестеден көруге болады.

Кесте 4 – $x = \frac{i}{40}$ $(i = \overline{0,10})$ нүктелеріндегі $\hat{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) = \begin{pmatrix} \hat{v}_1\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) \\ \hat{v}_2\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) \end{pmatrix} =$

$= \lambda_1\left(\frac{i}{40}\right) + \tilde{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right)$ $(j = 1,7,15,21)$ функциялардың мәндері

x	$\hat{v}_1\left(x, \frac{1}{40}\right)$	$\hat{v}_2\left(x, \frac{1}{40}\right)$	$\hat{v}_1\left(x, \frac{7}{40}\right)$	$\hat{v}_2\left(x, \frac{7}{40}\right)$	$\hat{v}_1\left(x, \frac{15}{40}\right)$	$\hat{v}_2\left(x, \frac{15}{40}\right)$	$\hat{v}\left(x, \frac{21}{40}\right)$	$\hat{v}_2\left(x, \frac{21}{40}\right)$
0	0.00000	0.0000	0.02250	-0.17250	0.12250	-0.47250	0.25000	-0.74999
$\frac{1}{40}$	0.00063	0.0000	0.02378	-0.16875	0.12641	-0.46375	0.25719	-0.73749
$\frac{2}{40}$	0.00250	0.0000	0.02650	-0.16500	0.13200	-0.45500	0.26625	-0.72499
$\frac{3}{40}$	0.00563	0.0000	0.03066	-0.16125	0.13928	-0.44625	0.27719	-0.71249
$\frac{1}{10}$	0.01000	0.0000	0.03625	-0.15750	0.14825	-0.43750	0.29000	-0.69999
$\frac{5}{40}$	0.01563	0.0000	0.04328	-0.15375	0.15891	-0.42875	0.30469	-0.68749
$\frac{6}{40}$	0.02250	0.0000	0.05175	-0.15000	0.17125	-0.42000	0.32125	-0.67499
$\frac{7}{40}$	0.03063	0.0000	0.06166	-0.14625	0.18528	-0.41125	0.33969	-0.66249
$\frac{8}{40}$	0.04000	0.0000	0.07300	-0.14250	0.20100	-0.40250	0.36000	-0.64999
$\frac{9}{40}$	0.05063	0.0000	0.08578	-0.13875	0.21841	-0.39375	0.38219	-0.63749
$\frac{10}{40}$	0.0625	0.0000	0.09999	-0.13500	0.23749	-0.38500	0.40625	-0.62500

Ендеше, төмендегі бағалау орындалатынына көз жеткіземіз:

$$\max_{j=\overline{0,20}} \max_{i=\overline{0,10}} \left\| \lambda\left(\frac{i}{40}\right) + \tilde{v}\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) - v^*\left(\frac{i}{40}, \frac{j}{40}\right) \right\| \leq 0.0000000939$$

Сонымен, $\lambda(x)$ параметрі $x_i = \frac{i}{40}$ $(i = 0,1,2,\dots,10)$ нүктелерінде $\delta_0 = 9.06 \cdot 10^{-8}$ дәлдігімен анықталғанда, қарастырылып отырған тестілік (2.2.3), (2.2.4) сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімі $\delta_1 = 9.39 \cdot 10^{-8}$ дәлдігімен анықталады.

Мысал 3.

Сызықтық емес екі нүктелі шеттік есепті қарастырайық

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in \left[0, \frac{1}{16}\right] \times \left(0, \frac{1}{4}\right), \tag{2.2.5}$$

$$g\left(x, v(x,0), v\left(x, \frac{1}{4}\right)\right) = 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{16}\right], \tag{2.2.6}$$

мұндағы x - әулет параметрі,

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} te^{t\cdot x} & x(t+1) \\ x^2t & sin(2x+t)\end{pmatrix},$$

$$F(x,t)=\begin{pmatrix} (2t-t^3e^{t\cdot x})\,sin(x+1)+(1-t^2)x^3 \\ (1-t)\,sin(t+2x)-t^3\,sin(x+1)\end{pmatrix},$$

$$g\left(x,\begin{pmatrix} v_1(x,0) \\ v_2(x,0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1(x,T) \\ v_2(x,T)\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_1(x,0)v_2(x,T)-v_2(x,0)v_1(x,T)-\frac{x^2}{4}sin(x+1) \\ v_1(x,0)v_2(x,T)+\frac{1}{2}v_2(x,0)v_1(x,T)+\frac{x^2}{8}sin(x+1)\end{pmatrix},$$

немесе

$$g(x,w_1,w_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}w_{1,1}w_{2,2}-w_{1,2}w_{2,1}-\frac{x^2}{4}sin(x+1) \\ w_{1,1}w_{2,2}+\frac{1}{2}w_{1,2}w_{2,1}+\frac{x^2}{8}sin(x+1)\end{pmatrix},(x,t)\in[0,\frac{1}{16}]\times[0,\frac{1}{4}]$$

Бұл есепте кез келген $A(x,t)$ және $F(x,t)$ функцияларын қарастырамыз.

Есептің берілгендері бойынша 2.1.1-ші теореманың барлық шарттары орындалады. $\lambda^0(x)\equiv\lambda^0=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0.01\\0.01\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0.01\\0.01\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ векторын алып, $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))=0$ сызықтық емес теңдеулер жүйесін итерациялық үдерістерді пайдаланып шешеміз. $Q_{*,\Delta_1(x)}(x,\lambda(x))$ теңдеулер жүйесінің шешімі 10^{-4} дәлдіктен аспайтын шешімін табайық.

20-шы итерациядағы $x_i=\frac{1}{160}(i-1)$ $(i=\overline{1,11})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0)}(x)$, $\lambda_2^{(0)}(x)$ функцияларының мәндерін 5-ші кестеден көреміз.

Бұл кестеден $\gamma=44.94$ болғанда,

$$\gamma\cdot\left\|Q_{*,\Delta_N}(x,\lambda^0)\right\|<2.5,$$

$$\max_{i=\overline{0,10}}\left\|\begin{pmatrix}\lambda_1^{(20)}\left(\frac{i}{160}\right)\\ \lambda_2^{(20)}(\frac{i}{160})\end{pmatrix}-\lambda^0\right\|\le 0.061<2.5$$

бағалауының орындалатынына көз жеткіздік.

Кесте 5 – $x_i = \frac{1}{160}(i-1)$ $(i = \overline{1,11})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0)}(x)$, $\lambda_2^{(0)}(x)$ функциялардың мәндері

i	x_i	$\lambda_{1,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{1,2}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,1}^{(0)}(x_i)$	$\lambda_{2,2}^{(0)}(x_i)$
1	0.000000	-0.051144	-0.024807	-0.000176	-0.000085
2	0.006250	-0.051000	-0.027426	0.000151	-0.000081
3	0.012500	-0.050396	-0.030050	0.000947	-0.000093
4	0.018750	-0.049443	-0.032683	0.002096	-0.000129
5	0.025000	-0.048231	-0.035338	0.003507	-0.000200
6	0.031250	-0.046825	-0.038028	0.005114	-0.000323
7	0.037500	-0.045260	-0.040755	0.006879	-0.000499
8	0.043750	-0.043531	-0.043498	0.008808	-0.000707
9	0.050000	-0.041607	-0.046208	0.010934	-0.000897
10	0.056250	-0.039465	-0.048842	0.013282	-0.001022
11	0.062500	-0.037112	-0.051379	0.015847	-0.001060

Есептеулер нәтижесінде $Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x))$ операторының

$$\left\|Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda^0(x))\right\| \leq 10^{-4}$$

болғандықтан, $Q_{*,\Delta_1(x)}(x, \lambda(x)) = 0$ теңдеуінің

$$\max_{i=0,10}\left\|Q_{*,\Delta_1(x)}\left(x, \lambda^{(20)}(x_i)\right)\right\| \leq 10^{-4}$$

дәлдігімен табылған жуық шешімі деп $\lambda^*(x_i)$ ретінде $\lambda^{(20)}(x_i)$ -ді аламыз және оған сәйкес

$$\hat{v}^*\left(\frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right) = \lambda^{(20)}\left(\frac{i}{160}\right) + a_1\left(A, \frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right)\lambda^{(20)}\left(\frac{i}{160}\right) + a_1\left(F, \frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right),$$

$$i = \overline{0,10}, j = \overline{0,20}$$

функциясын анықтаймыз.

Кейбір $x_i = \frac{1}{160}(i-1)$ $(i = \overline{1,11})$, $t_j = \frac{1}{80}(j-1)$ $(j = \overline{1,21})$ нүктелеріндегі $\hat{v}_1^*(x_i, t_j)$, $\hat{v}_2^*(x_i, t_j)$ функцияларының мәндері 6-шы кестеде келтірілген.

Кесте 6 – $x = \frac{i}{160}$ $(i = \overline{0,10})$ нүктелеріндегі $\hat{v}^*\left(\frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right) = \begin{pmatrix} \hat{v}_1^*\left(\frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right) \\ \hat{v}_2^*\left(\frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right) \end{pmatrix} =$

$= \lambda_1\left(\frac{i}{160}\right) + \hat{v}\left(\frac{i}{160}, \frac{j}{80}\right)$ $(i = 1,3,7,11)$ функцияларының мәндері

t	$\hat{v}_1^*(\frac{1}{160},t)$	$\hat{v}_2^*(\frac{1}{160},t)$	$\hat{v}_1^*(\frac{3}{160},t)$	$\hat{v}_2^*(\frac{3}{160},t)$	$\hat{v}_1^*(\frac{7}{160},t)$	$\hat{v}_2^*(\frac{7}{160},t)$	$\hat{v}_1^*(\frac{11}{160},t)$	$\hat{v}_2^*(\frac{11}{160},t)$
0	-0.05114	-0.02481	-0.05039	-0.03005	-0.04526	-0.04075	-0.03711	-0.05138
$\frac{1}{80}$	-0.05102	-0.02473	-0.05027	-0.02967	-0.04515	-0.03978	-0.03702	-0.04984
$\frac{2}{80}$	-0.05063	-0.02450	-0.04989	-0.02915	-0.04477	-0.03868	-0.03665	-0.04817
$\frac{3}{80}$	-0.04999	-0.02414	-0.04925	-0.02849	-0.04414	-0.03745	-0.03602	-0.04638
$\frac{4}{80}$	-0.04910	-0.02363	-0.04836	-0.02769	-0.04324	-0.03609	-0.03512	-0.04446
$\frac{5}{80}$	-0.04796	-0.02299	-0.04720	-0.02677	-0.04203	-0.03461	-0.03395	-0.04244
$\frac{6}{80}$	-0.04656	-0.02221	-0.04579	-0.02571	-0.04065	-0.03301	-0.03251	-0.04030
$\frac{7}{80}$	-0.04489	-0.02131	-0.04413	-0.02454	-0.03896	-0.03128	-0.03080	-0.03806
$\frac{8}{80}$	-0.04299	-0.02028	-0.04220	-0.02324	-0.03701	-0.02946	-0.02883	-0.03571
$\frac{9}{80}$	-0.04082	-0.01913	-0.04002	-0.02183	-0.03479	-0.02752	-0.02659	-0.03326
$\frac{10}{80}$	-0.03839	-0.01787	-0.03758	-0.02030	-0.03232	-0.02548	-0.02407	-0.03071
$\frac{11}{80}$	-0.03572	-0.01650	-0.03489	-0.01868	-0.02959	-0.02335	-0.02129	-0.02808
$\frac{12}{80}$	-0.03279	-0.01503	-0.03193	-0.01695	-0.02659	-0.02112	-0.01824	-0.02536
$\frac{13}{80}$	-0.02960	-0.01346	-0.02872	-0.01512	-0.02332	-0.01879	-0.01492	-0.02256
$\frac{14}{80}$	-0.02616	-0.01179	-0.02526	-0.01321	-0.01980	-0.01639	-0.01134	-0.01968
$\frac{15}{80}$	-0.02247	-0.01003	-0.02153	-0.01121	-0.01601	-0.01391	-0.00748	-0.01673
$\frac{16}{80}$	-0.01852	-0.00819	-0.01756	-0.00913	-0.01196	-0.01136	-0.00335	-0.01371
$\frac{17}{80}$	-0.01431	-0.00627	-0.01331	-0.00697	-0.00764	-0.00873	0.00104	-0.01063
$\frac{18}{80}$	-0.00986	-0.00427	-0.00882	-0.00474	-0.00306	-0.00604	0.00571	-0.00749
$\frac{19}{80}$	-0.00514	-0.00221	-0.00406	-0.00245	0.00178	-0.00329	0.01064	-0.00430
$\frac{20}{80}$	-0.00018	-0.00009	0.00095	-0.00009	0.00688	-0.00050	0.01585	-0.00106

Сандық шешім дифференциалдық теңдеуді және табылған шеттік шарттарды қандай дәлдікпен қанағаттандыратынын тексерейік

$$\max_{i==0,10}\max_{j=0,20}\left\|\left.\frac{\partial\hat{v}(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=\frac{i}{160}\\ t=\frac{j}{80}}} - A\left(\frac{i}{160},\frac{j}{80}\right)\hat{v}\left(\frac{i}{160},\frac{j}{80}\right) - F\left(\frac{i}{160},\frac{j}{80}\right)\right\| \le 1.5\cdot 10^{-4}$$

Сонымен қатар, келесі шарт орындалады:

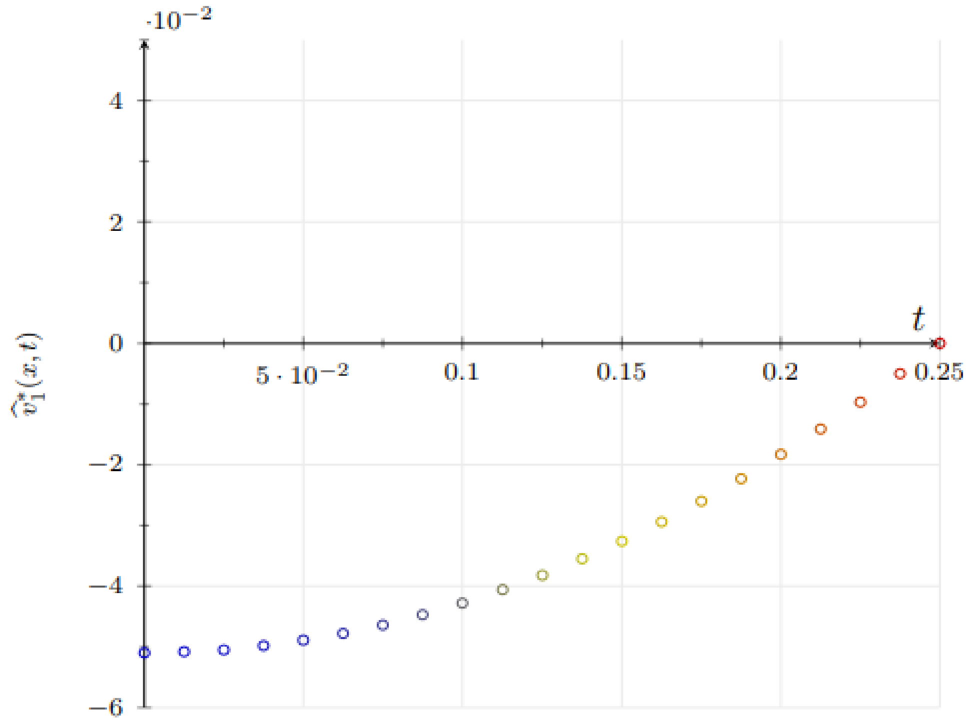
$$\max_{i==0,10}\|g(x_i,\hat{v}(x_i,0),\hat{v}(x_i,T)\| \le 5.9\cdot 10^{-8}$$

Сонымен, 2.1.1 теоремасының шарттары және (2.1.13) бағалауы орындалатынына көз жеткіздік.

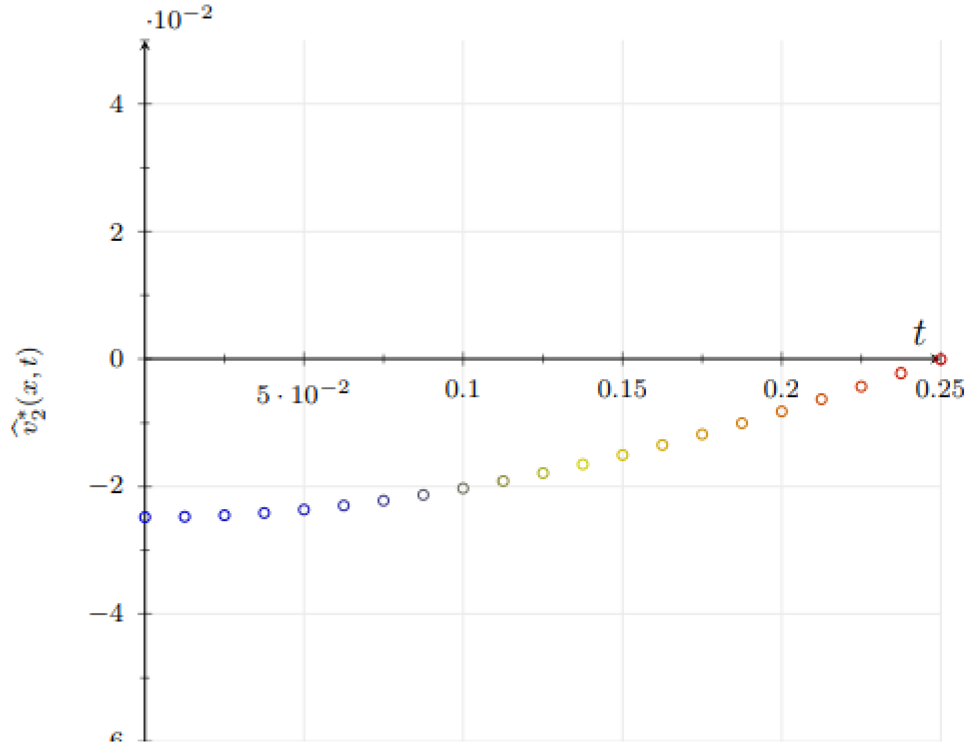
Ескерту 2.2.2 $\frac{\partial\hat{v}(x,t)}{\partial t}$ *туындысы үш нүктелі сандық дифференциалдау әдісімен есептеледі.*

Яғни, бұл есепте ұсынылған әдісіміздің сызықтық емес есептерді шешуде тиімділігін байқауға болады.

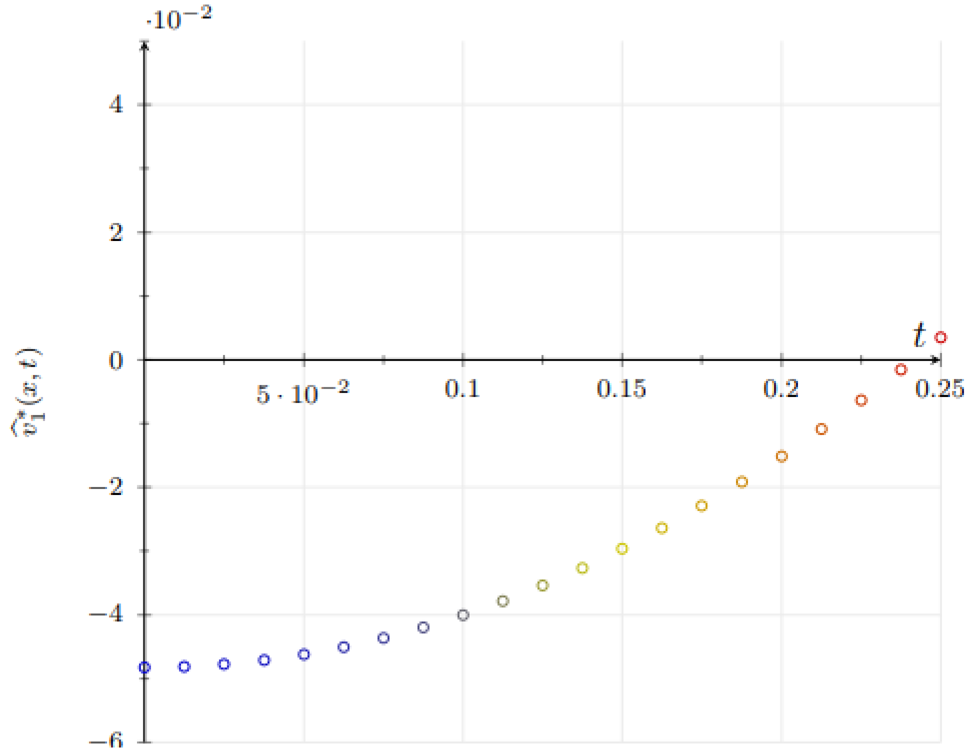
$x_1 = 0,\ x_5 = 0.025,\quad x_9 = 0.05,\ x_{11} = 0.0625$ нүктелеріндегі $\hat{v}_1^*(x,t)$, $\hat{v}_2^*(x,t)$ функциялардың графиктерін 1-8 суреттерден көреміз.



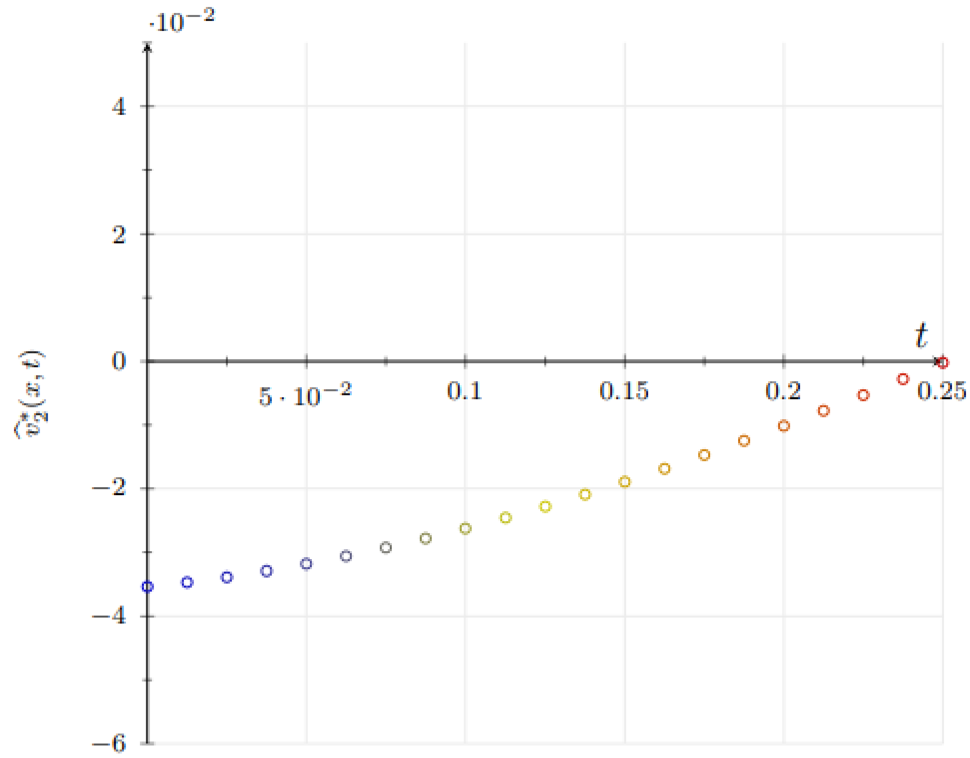
Сурет 1– $\hat{v}_1^*(0,t))$ жуық шешім



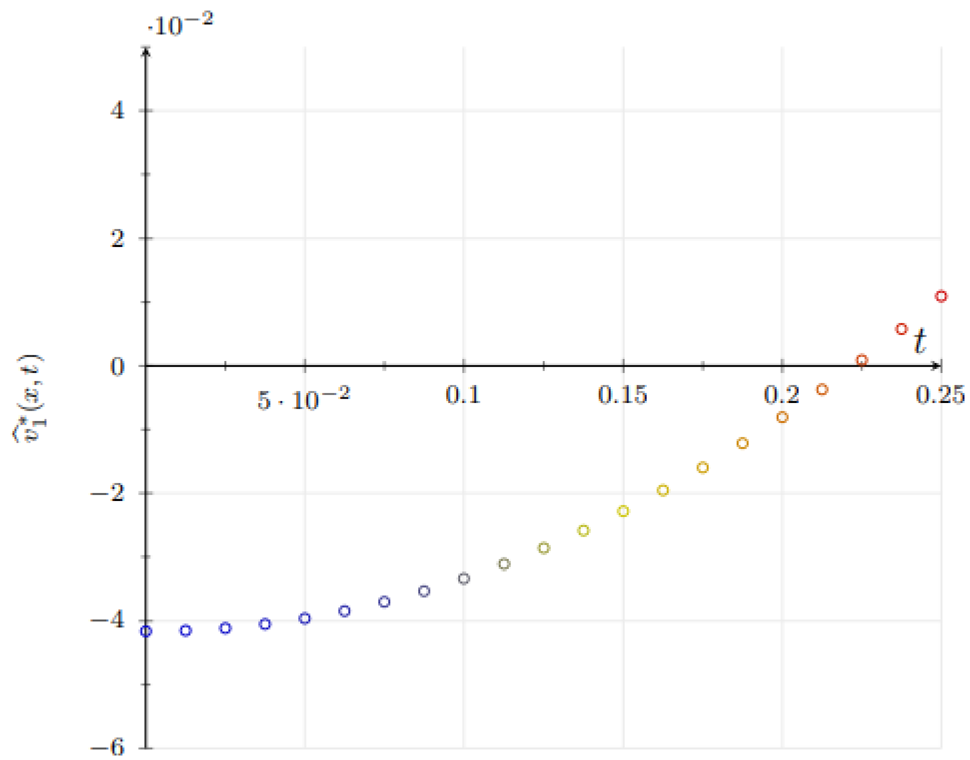
Сурет 2– $\hat{v}_2^*(0,t)$) жуық шешім



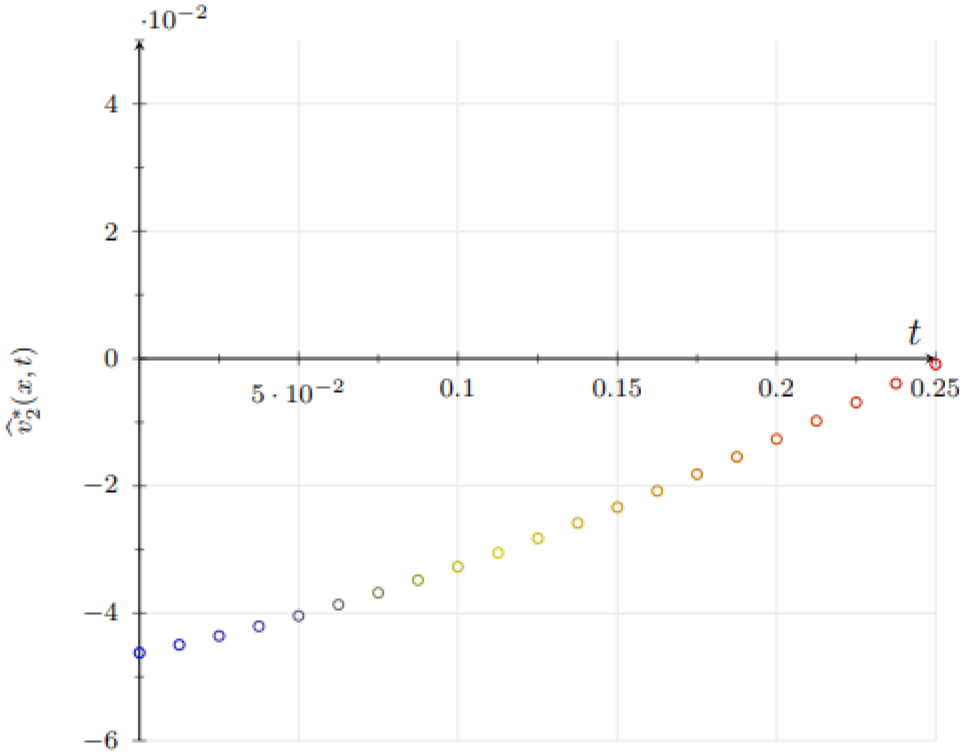
Сурет 3– $\hat{v}_1^*(0.025,t)$) жуық шешім



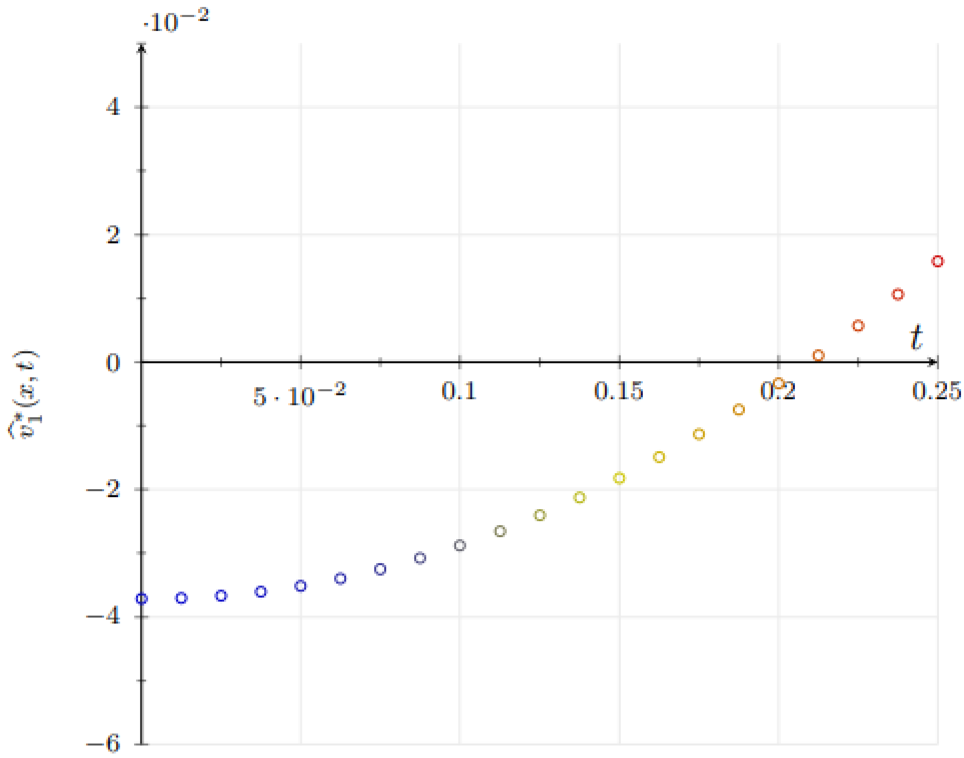
Сурет 4– $\hat{v}_2^*(0.025, t))$ жуық шешім



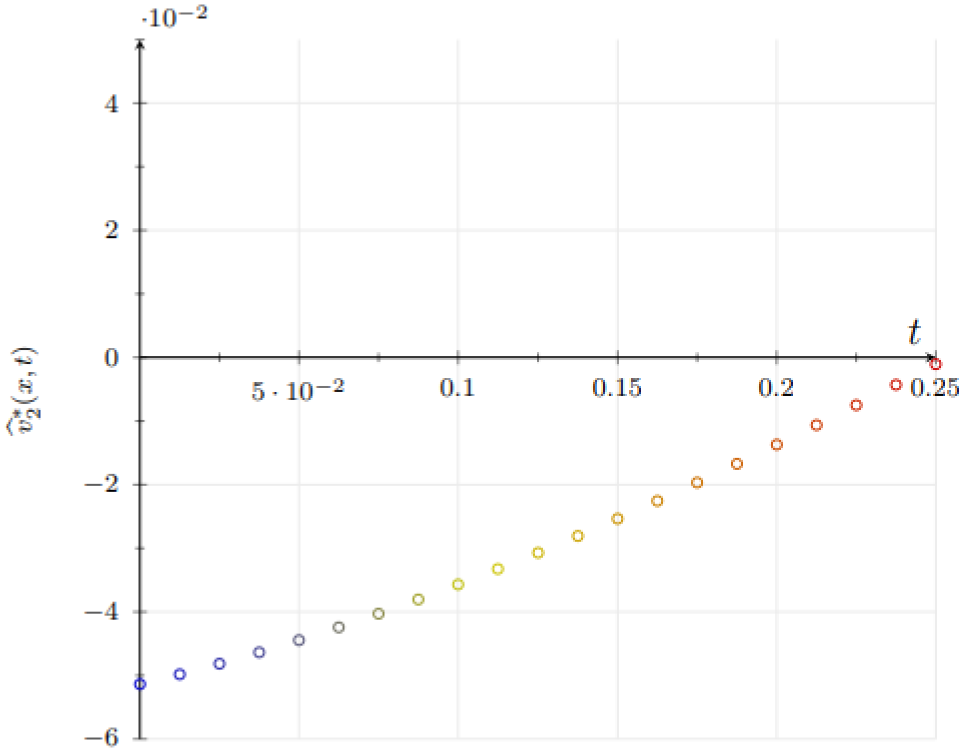
Сурет 5– $\hat{v}_1^*(0.05, t))$ жуық шешім



Сурет 6– $\hat{v}_2^*(0.05, t))$ жуық шешім



Сурет 7– $\hat{v}_1^*(0.0625, t))$ жуық шешім



Сурет 8– $\hat{v}_2^*(0.0625, t)$) жуық шешім

2.3 Аралас туындылы гиперболалық теңдеулер үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп

$[0,\omega] \times [0,T]$ облысында гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + P(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{2.3.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.2}$$

$$g\left(x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right) = 0, \tag{2.3.3}$$

мұндағы $A(x,t), P(x,t) - (n \times n)$ өлшемді матрицалар, $f: [0,\omega] \times [0,T] \times R^{2n} \to R^n$, $g: [0,\omega] \times R^n \times R^n \to R^n$– үзіліссіз функциялар.

Анықтама 2.3.1 $u^*(x,t) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *функциясын (2.3.1)-(2.3.3) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) $[0,\omega] \times [0,T]$ *облысында өзінің* $\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}) \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *және* $\frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x \partial t} \in C([0,\omega] \times [0,T], R^n)$ *дербес туындыларымен бірге (2.3.1)-ші сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады,*

2) $(x,t) \in [0,\omega] \times [0,T]$ *үшін (2.3.2), (2.3.3) шарттарды қанағаттандырады.*

Жаңа белгісіз $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ функцияның көмегімен (2.3.1)-(2.3.3) есебінен дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін эквивалентті шеттік есепке көшеміз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + P(x,t)\int_0^x v(\xi,t)d\xi + f(x,t), (x,t) \in [0,\omega] \times [0,T], \quad v \in R^n, \tag{2.3.4}$$

$$g(x, v(x,0), v(x,T)) = 0, \quad x \in [0,\omega]. \tag{2.3.5}$$

(2.3.2) шарты

$$u(x,t) = \int_0^x v(\xi,t)d\xi\,, \quad (x,t) \in [0,\omega] \times [0,T]. \tag{2.3.6}$$

қатынасында ескерілген, енді алдағы уақытта $[0,\omega]$ аралығында бекітілген x үшін қарастырылады.

Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша $h > 0{:}\, Nh = T \ (N \in N)$ қадамды алып, $\{x\} \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x)$ бөліктерге бөлеміз, мұндағы $\Omega_r(x) = \{x\} \times [(r-1)h, rh),\, r = \overline{1,N}$.

$\Omega_r(x)$ аралығында $\tilde{v}_r(x,t) = v(x,t) - \lambda_r(x)$ алмастыруын енгізсек, мұндағы $\lambda_r(x) = v(x,(r-1)h),\, r = \overline{1,N},\ \lambda_{N+1}(x) = \lim_{t \to T-0} v(x,t)$, онда

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r(x)) + P(x,t)\int_0^x (\tilde{v}_r(\xi,t) + \lambda_r(\xi))d\xi + f(x,t),$$
$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \tag{2.3.7}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \tag{2.3.8}$$

$$g\big(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)\big) = 0, \tag{2.3.9}$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x,t) - \lambda_{r+1}(x) = 0, \qquad r = \overline{1,N} \tag{2.3.10}$$

параметр енгізілген эквивалентті есебіне түрлендіріледі. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ арқылы элементтері $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \ldots, \lambda_{N+1}^*(x)) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)})$, $\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t), \tilde{v}_2^*(x,t) \ldots \tilde{v}_N^*(x,t)) \in C([0,\omega] \times [0,T], \Omega_r(x), R^{nN})$ болатын жұпты белгілейміз. $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x,t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x,t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (2.3.7)-(2.3.8) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r^*(x) + \lim\limits_{t\to rh-0} \tilde{v}_r^*(x,t)$ (2.3.9), (2.3.10) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 2.3.2 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ *жұбын (2.3.7)-(2.3.10) есебінің шешімі деп айтамыз.*

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ жұбы (2.3.7)-(2.3.10) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (2.3.4), (2.3.5) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес әулетінің шешімі болады. Онда, (2.3.6) теңдікпен анықталатын $u^*(x,t)$ функциясы (2.3.1)-(2.3.3) есебінің шешімі болады.

Барлық $r = \overline{1,N+1}$ үшін $\lambda_r(x)$ параметрлер белгілі болсын делік. Онда, әрбір $t \in \Omega_r(x)$ үшін $\tilde{v}_r(x,t)$ функциясын $(r = \overline{1,N})$ (2.3.7), (2.3.8) Коши есебінен анықтауға болады

$$\tilde{v}_r(x,t) =$$

$$= \int_{(r-1)h}^{t} \left(A(x,\tau)(\tilde{v}_r(x,\tau) + \lambda_r(x)) + P(x,\tau) \int_0^x (\tilde{v}_r(\xi,\tau) + \lambda_r(\xi)) d\xi \right) d\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau) d\tau, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}. \qquad (2.3.11)$$

(2.3.11)-ші теңдіктен $\lim\limits_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ анықтап және табылған мәндерді (2.3.9), (2.3.10)-ші теңдіктерге қоямыз. Сонда,

$$g\big(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)\big) = 0, \qquad (2.3.12)$$

$$\lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^{rh} \left(A(x,t)(\tilde{v}_r(x,t) + \lambda_r(x)) + P(x,t) \int_0^x (\tilde{v}_r(\xi,t) + \lambda_r(\xi))\, d\xi \right) dt +$$

$$+\int_{(r-1)h}^{rh} f(x,t)dt - \lambda_{r+1}(x) = 0, \qquad (2.3.13)$$

$\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N+1}$, параметрге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін аламыз және

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \tilde{v}\right) = 0, \quad \lambda(x) \in R^{n(N+1)} \qquad (2.3.14)$$

түрінде жазамыз.

0-ші қадам.

(a) $\lambda^{(0)}(x)$ параметрін

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, 0\right) = 0$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(0)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(0)}(x,t), \tilde{v}_2^{(0)}(x,t), \ldots, \tilde{v}_N^{(0)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(0)}(x)) + P(x,t)\int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi + f(x,t),$$

$$t \in \Omega_r(x), r = \overline{1, N},$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0,$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0,T]$ -да

$$v^{(0)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0, \omega]$.

1-ші қадам.

(a) $\lambda^{(1)}(x)$ параметрін

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right) = 0$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(1)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\left(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(1)}(x)\right) + P(x,t)\int\limits_0^x \left(\tilde{v}_r^0(\xi,t) + \lambda_r^{(1)}(\xi)\right)d\xi + f(x,t),$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N},$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0,$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0,T]$ -да

$$v^{(1)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(1)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0,\omega]$.

Айталық, $(\lambda^{(k-1)}(x), \tilde{v}^{(k-1)}(x,[t]))$ жұбы анықталған болсын.

***k* -шы қадам.**

(a) $\lambda^{(k)}(x)$ параметрлерін

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(k-1)}\right) = 0$$

теңдеуінен табамыз.

(b) $\tilde{v}^{(k)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(k)}(x,t), \tilde{v}_2^{(k)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(k)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)(\tilde{v}_r + \lambda_r^{(k)}(x)) + P(x,t)\int\limits_0^x (\tilde{v}_r^{(k-1)}(\xi,t) + \lambda_r^{(k)}(\xi))d\xi + f(x,t),$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N},$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0,$$

Коши есебін шешіп анықтаймыз.

(c) $\{x\} \times [0, T]$ -да

$$v^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0, \omega]$.

Бұл есепте

$$F(x,t) = P(x,t) \int_0^x v(\xi, t) d\xi + f(x,t)$$

деп белгілесек, (2.3.4), (2.3.5) есептің шешімі (2.1.1), (2.1.2) есебінің шешімі болады. Әрі қарай құрылған алгоритмнің жинақтылығын, қойылған есептің шешімі бар және шешімнің жалғыз болуының жеткілікті шарттары туралы тұжырымдарды анықтау 2.1 мен 2.2 ішкі бөлімдердегі зерттеулер бойынша іске асырылады.

3 ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

3.1 Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті

Келесі түрдегі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетін қарастырайық

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t)d\xi\,, v\right), \quad v \in R^n, \quad (x, t) \in [0, \omega] \times [0, T], \quad (3.1.1)$$

$$g(x, v(x, 0), v(x, T)) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (3.1.2)$$

мұндағы $x \in [0, \omega]$– әулет параметрі, $f: [0, \omega] \times [0, T] \times R^{2n} \to R^n$, $g: [0, \omega] \times\ R^n \times R^n \to R^n$ үзіліссіз функциялар, $\psi(t)$– $[0, T]$-да үзіліссіз функция, $\|v\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in(0,T)} |v_i(x, t)| < \infty$.

Анықтама 3.1.1 $v(x, t) \in C([0, \omega] \times [0, T], R^n)$ *функциясын (3.1.1), (3.1.2) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) әрбір $x \in [0, \omega]$ *үшін* $[0, T]$ *-да үзіліссіз дифференциалданады,*

2) (3.1.1)-ші интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады,

3) (3.1.2)-ші шеттік шартты қанағаттандырады.

Есептің қойылымы. *(3.1.1), (3.1.2) есебінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмдерін жасау, олардың жинақтылығының шарттарын алу, есептің оқшауланған шешімі бар болудың жеткілікті шарттарын алу, «оқшауланған» шешімінің есептің бастапқы деректерінің аз ауытқуларынан үзіліссіз тәуелді болу шарттарын анықтау, кері операторды табудың рекурренттік формуласын қорыту, алынған нәтижелерді гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептер әулетін зерттеу және шешуге қолдану, тестілік есептерде шешімін табу алгоритмдерінің жүзеге асырылуын көрсету.*

Параметрлеу әдісінің сұлбасы бойынша $h > 0: Nh = T \ (N \in N)$ қадамды алып, $\{x\} \times [0, T) = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r(x)$ бөлшектеуді орындаймыз, мұндағы $\Omega_r(x) = \{x\} \times [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}$.

$\Omega_r(x)$ -та $v(x, t)$ функциясының тарылуын $v_r(x, t)$ деп белгілейміз, яғни $v_r(x, t) = v(x, t), t \in \Omega_r(x), r = \overline{1, N}$.

Қосымша параметрлерді енгіземіз $\lambda_r(x) = v(x, (r-1)h), \quad r = \overline{1, N}$, $\lambda_{N+1}(x) = \lim\limits_{t\to T-0} v(x, t)$ және $\Omega_r(x)$ -та барлық $r = \overline{1, N}$ үшін $\tilde{v}_r(x, t) = v(x, t) - \lambda_r(x)$ функцияның алмастырылуын орындаймыз.

Осылайша, параметрі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін көп нүктелі сызықтық емес шеттік есеп аламыз

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \lambda_r(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi, t)d\xi, \lambda_r(x) + \tilde{v}_r(x, t)\right),$$

$$t \in \Omega_r(x), r = \overline{1, N}, \qquad (3.1.3)$$

$$\tilde{v}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \qquad (3.1.4)$$

$$g\big(x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)\big) = 0, \qquad (3.1.5)$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x, t) - \lambda_{r+1}(x) = 0, \ \ r = \overline{1, N}\,. \qquad (3.1.6)$$

$(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$ элементтерінің компоненттері үшін келесі шарттар орындалсын:

(1) Әрбір r үшін $\tilde{v}_r^*(x, t) \in C(\Omega_r(x))$ функциясы үзіліссіз дифференциалданады

(2) $\tilde{v}_r^*(x, t)$ функциясы $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ болғанда (3.1.3)-(3.1.4) Коши есебін қанағаттандырады

(3) $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_{N+1}^*(x)$, $\lambda_r(x) + \lim\limits_{t \to rh-0} \tilde{v}_r(x, t)$ (3.1.5), (3.1.6) теңдіктерін қанағаттандырады.

Анықтама 3.1.2 *(1)-(3) шарттарды қанағаттандыратын* $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$ *жұбын (3.1.3)- (3.1.6) есебінің шешімі деп айтамыз.*

(3.1.1)-(3.1.2) және (3.1.3)-(3.1.6) есептер әулеті эквивалентті болады.

Егер $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x, [t]))$ жұбы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болса, онда

$$v^*(x, t) = \begin{cases} \lambda_r^*(x) + \tilde{v}_r^*(x, t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}, \\ \lambda_{N+1}^*(x), & \text{егер} \quad x \in [0, \omega], \quad t = T \end{cases}$$

функциясы (3.1.1), (3.1.2) шеттік есептің бекітілген x -ке сәйкес шешімі болады.

Керісінше, $\hat{v}(x, t)$ функциясы (3.1.1)-(3.1.2) есебінің шешімі болсын.

Белгілеулер енгізейік:

$\hat{\lambda}(x) = (\hat{\lambda}_1(x), \hat{\lambda}_2(x), \ldots, \hat{\lambda}_{N+1}(x))$, $\hat{\tilde{v}}(x, [t]) = (\hat{\tilde{v}}_1(x, t), \hat{\tilde{v}}_2(x, t), \ldots \hat{\tilde{v}}_N(x, t))$, мұндағы

$\hat{\lambda}_r(x) = \hat{v}(x, (r-1)h), \quad r = \overline{1, N},$

$\hat{\lambda}_{N+1}(x) = \hat{v}(x, T),$

$\hat{\tilde{v}}_r(x, t) = \hat{v}(x, t) - \hat{v}(x, (r-1)h), \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1, N}.$

Онда, (3.1.1)-(3.1.2) және (3.1.3)-(3.1.6) есептерінің эквиваленттілігінен $(\hat{\lambda}(x), \hat{\tilde{v}}(x, [t]))$ жұбы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болады.

Барлық $r = \overline{1, N+1}$ үшін $\lambda_r(x)$ параметрлер белгілі болсын делік. Онда, әрбір $t \in \Omega_r(x)$ үшін $\tilde{v}_r(x,t)$ функциясын $(r = \overline{1,N})$ (3.1.3), (3.1.4) Коши есебінен анықтауға болады. Бұл есеп аралас типті интегралдық теңдеуіне эквивалентті болады

$$\tilde{v}_r(x,t) = \int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t) + \int_0^x \lambda_r(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,\tau)d\xi, \lambda_r(x) + \tilde{v}_r(x,\tau)\right)d\tau,$$
$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N} \qquad (3.1.7)$$

(3.1.7)-ші теңдіктен $\lim\limits_{t\to rh-0} \tilde{v}_r(x,t)$ анықтап және табылған мәндерді (3.1.5), (3.1.6)-шы теңдіктерге қоямыз. Сонда,

$$g\big(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)\big) = 0, \qquad (3.1.8)$$

$$\lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\psi(t) + \int_0^x (\lambda_r(\xi) + \tilde{v}_r(\xi,\tau))d\xi\,, \lambda_r(x) + \tilde{v}_r(x,t)\right)dt -$$
$$-\lambda_{r+1}(x) = 0, \qquad (3.1.9)$$

$\lambda_r(x)$, $r = \overline{1,N+1}$, параметрге қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін аламыз және

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}\right) = 0, \quad \lambda(x) \in R^{n(N+1)}, \quad x \in [0,\omega] \qquad (3.1.10)$$

түрінде жазамыз.

Шарт 3.1.1 *Кейбір $h > 0$: $Nh = T$ $(N \in N)$ үшін айқын емес сызықтық емес интегралдық теңдеулер жүйесі әулетінің*

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,0\right) = 0 \qquad (3.1.11)$$

$\lambda^{(0)}(x) \in C([0,\omega],R^{n(N+1)})$ шешімі бар.

Айталық, $h > 0$: $Nh = T$ $(N \in N)$ үшін 3.1.1-ші шарт орындалсын. $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ болғанда (3.1.3), (3.1.4) Коши есебінің шешімін $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ арқылы белгілейміз. $\lambda^{(0)}(x)$ және $\tilde{v}^{(0)}(x,t)$ арқылы

$$v^{(0)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t) & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(0)}(x) & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз, $x \in [0,\omega]$.

$\rho_\lambda > 0$, $\rho_{\tilde{v}} > 0$, $\rho_v > 0$ сандарын таңдаймыз және келесі жиындарды құрамыз:

$$S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda) = \{\lambda(x) \in C([0,\omega], R^{n(N+1)}):$$
$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\|_3 = \max_{x\in[0,\omega]} \max_{r=\overline{1,N+1}} \left\|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\right\| < \rho_\lambda$$

$$S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}) = \{\tilde{v}(x,[t]) \in C([0,\omega]\times[0,T],\Omega_r(x),R^{nN}): \left\|\tilde{v} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 < \rho_{\tilde{v}}\},$$

$$S(v^{(0)}(x,t),\rho_v) = \{v(x,t) \in C([0,\omega]\times[0,T],R^n):$$
$$\max_{(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T]} \left\|v(x,t) - v^{(0)}(x,t)\right\| < \rho_v\},$$

$$G_f(x,\rho_u,\rho_v) = \{(x,t,u,v) \in [0,\omega]\times[0,T]\times R^{2n}:$$
$$\left\|u - u^{(0)}(x,t)\right\| < \omega\cdot\rho_v, \quad \left\|v - v^{(0)}(x,t)\right\| < \rho_v\},$$

$$G_g(x,\rho_\lambda) = \{(x,w_1,w_2) \in [0,\omega]\times R^{2n}:$$
$$\left\|w_1 - v^{(0)}(x,0)\right\| < \rho_\lambda, \quad \left\|w_2 - v^{(0)}(x,T)\right\| < \rho_\lambda\}.$$

Шарт 3.1.2

1) $f(x,t,u,v)$ функциясы үшін $G_f(x,\rho_u,\rho_v)$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ бар және келесі теңсіздіктер орындалады

$$\left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}\right\| \le L_1, \quad \left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}\right\| \le L_2, \qquad (x,t,u,v) \in G_f(x,\rho_u,\rho_v);$$

2) $g(x,w_1,w_2)$ функциясының $G_g(x,\rho_\lambda)$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары $\frac{\partial g}{\partial w_1}, \frac{\partial g}{\partial w_2}$ бар және келесі теңсіздіктер орындалады

$$\left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right\| \le L_3, \quad \left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right\| \le L_4, \qquad (x,w_1,w_2) \in G_g(x,\rho_\lambda),$$

мұндағы L_i – тұрақты ($i = \overline{1,4}$).

3.1.1-ші шарт орындалсын. $(\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}(x,[t]))$ жұбын аламыз. $(\lambda^{(k)}(x),\tilde{v}^{(k)}(x,[t]))$, $k = 1,2,...$, тізбегін келесі алгоритм бойынша анықтаймыз:
1-ші қадам.

(i) $\lambda^{(1)}(x) = \left(\lambda_1^{(1)}(x), \lambda_2^{(1)}(x), \dots, \lambda_{N+1}^{(1)}(x)\right)$ функциясын

$$Q_{1,h}(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \tilde{v}^{(0)}) = 0$$

айқын емес сызықтық емес интегралдық теңдеулер жүйесінен анықтаймыз.

(ii) $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(1)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t))$ функциялар жүйесін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi, \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r\right),$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad (3.1.12)$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \quad (3.1.13)$$

Коши есебін шешіп табамыз.

$$(iii) \;\; v^{(1)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,t), & \text{егер} \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(1)}(x), & \text{егер} \quad t = T \end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

2-ші қадам.

(i) Айқын емес сызықтық емес интегралдық теңдеулер жүйесінен

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \tilde{v}^{(1)}\right) = 0$$

$\lambda^{(2)}(x) = \left(\lambda_1^{(2)}(x), \lambda_2^{(2)}(x), \dots, \lambda_{N+1}^{(2)}(x)\right)$ табамыз.

(ii) $\tilde{v}^{(2)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(2)}(x,t), \tilde{v}_2^{(2)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(2)}(x,t))$ функциялар жүйесін

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi, \lambda_r^{(2)}(x) + \tilde{v}_r\right),$$

$$t \in \Omega_r(x), \quad (3.1.14)$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \quad (3.1.15)$$

Коши есебін шешіп табамыз.

$$(iii)\ \ v^{(2)}(x,t)=\begin{cases}\lambda_r^{(2)}(x)+\tilde{v}_r^{(2)}(x,t), & \text{егер} \quad t\in\Omega_r(x), \quad r=\overline{1,N},\\ \lambda_{N+1}^{(2)}(x), & \text{егер} \quad t=T\end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

Айталық, $(\lambda^{(k-1)}(x),\tilde{v}^{(k-1)}(x,[t]))$ жұбы анықталған болсын.

k-шы қадам.

(i) Айқын емес сызықтық емес интегралдық теңдеулер жүйесінен

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int\limits_0^x\lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k-1)}\right)=0$$

$\lambda^{(k)}(x)=\left(\lambda_1^{(k)}(x),\lambda_2^{(k)}(x),\dots,\lambda_{N+1}^{(k)}(x)\right)\in C([0,\omega],R^{n(N+1)})$ табамыз.

(ii) $\tilde{v}^{(k)}(x,[t])=(\tilde{v}_1^{(k)}(x,t),\tilde{v}_2^{(k)}(x,t),\dots,\tilde{v}_N^{(k)}(x,t))$ функциялар жүйесін

$$\frac{\partial\tilde{v}_r}{\partial t}=f\left(x,t,\psi(t)+\int\limits_0^x\lambda_r^{(k)}(\xi)d\xi+\int\limits_0^x\tilde{v}_r(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^{(k)}(x)+\tilde{v}_r\right),$$
$$t\in\Omega_r(x), \qquad (3.1.16)$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h)=0, \quad r=\overline{1,N}, \qquad (3.1.17)$$

Коши есебін шешіп табамыз.

$$(iii)\ \ v^{(k)}(x,t)=\begin{cases}\lambda_r^{(k)}(x)+\tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & \text{егер} \quad t\in\Omega_r(x), \quad r=\overline{1,N},\\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & \text{егер} \quad t=T\end{cases}$$

функциясын анықтаймыз.

Келесі тұжырым (3.1.3)-(3.1.6) параметрі бар шеттік есептер әулетінің оқшауланған шешім бар болудың жеткілікті шарты болып табылады.

Теорема 3.1.1 *Кейбір* $h>0\colon Nh=T$ $(N=1,2,\dots)$, $\rho_\lambda>0$, $\rho_{\tilde{v}}>0$, $\rho_v>0$, $\rho_u>0$ *үшін 3.1.1 және 3.1.2-ші шарттар орындалсын,* $(n(N+1)\times n(N+1))$ *өлшемді* $\frac{\partial Q_{1,h}(x,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\tilde{v})}{\partial\widetilde{w}_1}$ *Якоби матрицасының* $x\in[0,\omega]$, $(\widetilde{w}_1=\lambda(x)$, $\widetilde{w}_2=\int_0^x\lambda(\xi)d\xi)$ *барлық* $(\lambda(x),\tilde{v}(x,[t]))\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)\times S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$ *жұптар әулеті үшін кері матрицасы бар және де келесі теңсіздіктер орындалсын*

(I) $\left\|\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{w}_1} Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v})\right)^{-1}\right\| \le \gamma_1(h), \gamma_1(h) - const,$

(II) $q_1(h) = \gamma_1(h) e^{h\cdot\gamma_1(h)L_1\omega} \frac{(L_1\omega+L_2)^2 h^2}{1-(L_1\omega+L_2)h} < 1,$

(III) $\frac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)} e^{h\cdot\gamma_1(h)L_1\omega} \max\limits_{x\in[0,\omega]} \left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)})\right\| \le \rho_\lambda,$

(IV) $\frac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)} e^{h\cdot\gamma_1(h)L_1\omega} \cdot \frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h} \times$

$$\times \max_{x\in[0,\omega]} \left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)})\right\| \le \rho_{\tilde{v}}$$

(V) $\rho_\lambda + \rho_{\tilde{v}} < \rho_v,\ \rho_v\omega < \rho_u.$

Онда кез келген $x \in [0,\omega]$ үшін $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t])$ жұптар тізбегі (3.1.3)-(3.1.6) есептің $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda) \times S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$ жиында $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t]))$ оқшауланған шешіміне жинақталады және келесі бағалаулар орынды:

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \frac{h\cdot\gamma_1(h)}{1-q_1(h)} e^{h\gamma_1(h)L_1\omega} \frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-h(L_1\omega+L_2)} \max_{r=\overline{1,N}} \widetilde{K}_r\,, \qquad (3.1.18)$$

$$\left\|\tilde{v}^* - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le \frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h} \left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\|_3, \qquad (3.1.19)$$

мұндағы $\widetilde{K}_r = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \sup\limits_{t\in\Omega_r(x)} \left\|f(x,t,\psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi\,, \lambda_r^{(0)}(x))\right\|,\ r = \overline{1,N}.$

Дәлелдеуі. x бекітілген болсын. $h > 0 : Nh = T\ \ (N \in N)$ қадам бойынша $\{x\} \times [0,T) = \cup_{r=1}^N \Omega_r(x)$ бөліктеу жасаймыз. (3.1.1), (3.1.2) есебінен эквивалентті функционалдық параметрі бар (3.1.3)-(3.1..6) есебіне көшеміз.

Кез келген $(\lambda(x), \tilde{v}(x,[t])) \in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda) \times S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$ жұбы үшін төмендегі теңсіздіктер орынды

$$\left\|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \le \left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\|_3 +$$

$$+\left\|\tilde{v} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 < \rho_\lambda + \rho_{\tilde{v}} < \rho_v, \quad t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \qquad (3.1.20)$$

$$\left\|\int_0^x (\lambda_r(\xi) + \tilde{v}_r(\xi,t))d\xi - \int_0^x (\lambda_r^{(0)}(\xi) + \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t))d\xi\right\| \le \int_0^x \left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\|_3 d\xi +$$

$$+\int_0^x \left\|\tilde{v}-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2 d\xi < (\rho_\lambda+\rho_{\tilde{v}})\omega < \rho_u, \qquad t\in\Omega_r(x), \quad r=\overline{1,N}. \quad (3.1.21)$$

(3.1.20) және теореманың (v) теңсіздігін ескерсек,

$$\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r(\xi)d\xi+\int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r+\tilde{v}_r(x,t)\right), \quad t\in\Omega_r(x), \quad r=\overline{1,N},$$

төрттіктері $G_f(x,\rho_u,\rho_v)$ жиынға тиісті болады.

(3.1.3)-(3.1.6) есебін шешу үшін ұсынылған алгоритмді қолданамыз. 3.1.1-ші шарттан $(\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}(x,[t]))$ жұбын аламыз. $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$ болғанда $\tilde{v}^{(0)}(x,[t])$ функциялар жүйесінің компоненттері (3.1.3), (3.1.4) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі әулетінің шешімі болғандықтан, келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \le$$
$$\le \left\|\int_{(r-1)h}^t f\left(x,\tau,\psi(\tau)+\int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi+\int_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,\tau)d\xi\,,\lambda_r^{(0)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_{(r-1)h}^t f\left(x,\tau,\psi(\tau)+\int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi\,,\lambda_r^{(0)}(x)\right)d\tau\right\|+$$
$$+\left\|\int_{(r-1)h}^t f(x,\tau,\psi(\tau)+\int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi\,,\lambda_r^{(0)}(x))d\tau\right\|. \quad (3.1.22)$$

3.1.2-ші шарт және (II) теңсіздігін ескерсек, (3.1.22)-ден:

$$\sup_{t\in\Omega_r(x)}\left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| \le \frac{h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\widetilde{K}_r, \quad (3.1.23)$$

мұндағы $\widetilde{K}_r=\max_{x\in[0,\omega]}\sup_{t\in\Omega_r(x)}\left\|f(x,t,\psi(t)+\int_0^x\lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi\,,\lambda_r^{(0)}(x))\right\|, \quad r=\overline{1,N}.$

Бұдан келесі бағалауды аламыз

$$\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le \frac{h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\max_{r=\overline{1,N}}\widetilde{K}_r \quad (3.1.24)$$

Параметр $\lambda^{(1)}(x)$ -ті

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)=0,\quad \lambda(x)\in R^{n(N+1)},\quad x\in[0,\omega] \quad (3.1.25)$$

теңдеуден табамыз.

(3.1.25) теңдеудің шешімін табу үшін, алдымен

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)=0,\quad \lambda(x)\in R^{n(N+1)},\quad x\in[0,\omega] \quad (3.1.26)$$

теңдеулер жүйесінің шешімін анықтаймыз.

Теорема шарттарына сәйкес $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)})$ операторы $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ жиынында 1-ші теореманың [28, 41 б.] барлық шарттарын қанағаттандырады. $\varepsilon_0>0$ санын төмендегі шарттар орындалатындай аламыз

$$\varepsilon_0\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\le\frac{1}{2},$$

$$\frac{\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}}{1-\varepsilon_0\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\|\le\rho_\lambda$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын және $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ жиынында $\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\big(x,\widetilde{w}_1,\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\big)$ Якоби матрицасының бірқалыпты үзіліссіздігін қолдана отырып, кез келген $\lambda(x)$, $\tilde{\lambda}(x)\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ үшін

$$\left\|\lambda-\tilde{\lambda}\right\|_3<\delta_0,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)-\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\tilde{\lambda}(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\|<\varepsilon_0,$$

$x\in[0,\omega]$, орындалатындай $\delta_0\in\left(0,\frac{\rho_\lambda}{2}\right]$-ді табамыз.

$$\alpha\ge\max\left\{1,\frac{\gamma_1(h)}{\delta_0}e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\|\right\}$$

таңдаймыз және итерациялық процесті құрамыз: $\lambda^{(1,1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$,

$$\lambda^{(1,1,m+1)}(x) = \lambda^{(1,1,m)}(x) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,1,m)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times\, Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,1,m)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right), \quad m = 0,1,2,\dots, \quad x \in [0,\omega]. \quad (3.1.27)$$

1-ші теорема [28, 41 б.] бойынша (3.1.27)-шы итерациялық процесс (3.1.26)-ші теңдеудің $\lambda^{(1,1)}(x)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және келесі бағалау орындалады

$$\left\|\lambda^{(1.1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \gamma_1(h) \max_{x\in[0,\omega]} \left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right)\right\| \le \rho_\lambda \quad (3.1.28)$$

Параметр $\lambda^{(0)}(x)$

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi)d\xi\,, 0\right) = 0$$

теңдеулер жүйесінің шешімі болады. Сондықтан,

$$\left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right)\right\| =$$

$$= \left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right) - Q_{1,h}(x, \lambda^{(0)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, 0)\right\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f\left(x, t, \psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt -$$

$$-\int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi\,,\lambda_r^{(0)}(x)\right)dt\Bigg\| \leq (L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2. \quad (3.1.29)$$

(3.1.28) теңдіктен (3.1.29) ескере отырып төмендегі бағалауды аламыз:

$$\left\|\lambda^{(1.1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 \leq \gamma_1(h)(L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2. \quad (3.1.30)$$

Енді,

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)=0, \quad \lambda(x)\in C\big([0,\omega],R^{n(N+1)}\big). \quad (3.1.31)$$

теңдеулер жүйесінің шешімін іздейміз. Ол үшін $\lambda^{(1,2,0)}(x)=\lambda^{(1,1)}(x)$, итерациялық процесін құрамыз

$$\lambda^{(1,2,m+1)}(x)=\lambda^{(1,2,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,2,m)}(x),\int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\, Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,2,m)}(x),\int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right), \quad m=0,1,2,\dots, \quad x\in[0,\omega]. \quad (3.1.32)$$

1-ші теорема [28, 41 б.] бойынша (3.1.32)-ші итерациялық процесс $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ жиынында (3.1.31)-ші теңдеудің $\lambda^{(1,2)}(x)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және

$$\left\|\lambda^{(1,2)}-\lambda^{(1,1)}\right\|_3 \leq \gamma_1(h)\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\| \quad (3.1.33)$$

бағалауы орындалады.

$Q_{1,h}(x,\lambda^{(1,1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1,1,0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)})=0$ теңдігін ескеріп,

$$\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)-\right.$$

$$-Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,1)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(1,1,0)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\Bigg\| \leq$$

$$\leq \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\psi(t)+\int\limits_0^x \lambda_r^{(1,1)}(\xi)d\xi\,+\right.\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^{(1,1)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt - .$$

$$\left.-\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\psi(t)+\int\limits_0^x \lambda_r^{(1,1,0)}(\xi)d\xi+\int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^{(1,1)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt\right\| \leq$$

$$\leq \max_{r=\overline{1,N}}\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L_1\int\limits_0^x \left\|\lambda_r^{(1,1)}(\xi)-\lambda_r^{(1,1,0)}(\xi)\right\| d\xi\, dt \leq$$

$$\leq hL_1x\left\|\lambda^{(1,1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3, \quad x\in[0,\omega]$$

бағалауын аламыз. Ендеше, (3.1.33)-тен

$$\left\|\lambda^{(1,2)}-\lambda^{(1,1)}\right\|_3 \leq \gamma_1(h)hL_1x\left\|\lambda^{(1,1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 \tag{3.1.34}$$

теңсіздігінің орындалатындығы шығады.

Әрі қарай, келесі теңдеулер жүйесінің шешімін табамыз

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int\limits_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)=0. \tag{3.1.35}$$

Итерациялық процесс құрамыз: $\lambda^{(1,3,0)}(x)=\lambda^{(1,2)}(x)$,

$$\lambda^{(1,3,m+1)}(x)=\lambda^{(1,3,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1,3,m)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,3,m)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right), \quad m = 0,1,2,\dots, \quad x \in [0,\omega]. \ (3.1.36)$$

1-ші теорема [28, 41 б.] бойынша (3.1.36)-ші итерациялық процесс $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$ жиынында (3.1.35)-ші теңдеудің $\lambda^{(1,3)}(x)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және төмендегі теңсіздік орындалады

$$\left\|\lambda^{(1,3)} - \lambda^{(1,2)}\right\|_3 \le \gamma_1(h) \max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,2)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right)\right\| \quad (3.1.37)$$

$Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,2)}(x), \int_0^x \lambda^{(1,2,0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right) = 0$ теңдігін ескеріп,

$$\left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,2)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right) -\right.$$

$$\left. -Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,2)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(1,2,0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right)\right\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f\left(x, t, \psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r^{(1,2)}(\xi)d\xi + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^{(1,2)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt -$$

$$\left. - \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f\left(x, t, \psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r^{(1,2,0)}(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^{(1,2)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt\right\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int\limits_0^x \left\|\lambda_r^{(1,2)}(\xi) - \lambda_r^{(1,2,0)}(\xi)\right\| d\xi\, dt \le$$

$$\le hL_1 x \left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3, \quad x \in [0,\omega]$$

және (3.1.34)-ші бағалауды қолдана отырып,

$$\left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1,2)}(x), \int_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi)d\xi, \tilde{v}^{(0)}\right) \right\| \le$$

$$\le \max_{r=\overline{1,N}} \int_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int_0^x \gamma_1(h)hL_1\xi \left\| \lambda_r^{(1,1)}(\xi) - \lambda_r^{(0)}(\xi) \right\| d\xi\, dt \le$$

$$\le \gamma_1(h)\frac{(hL_1x)^2}{2!}\left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3$$

бағалауын аламыз. Ендеше (3.1.37)-ден

$$\left\|\lambda^{(1,3)} - \lambda^{(1,2)}\right\|_3 \le \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^2}{2!}\left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \qquad (3.1.38)$$

Осылайша жалғастыра отырып, әрбір $x \in [0,\omega]$ үшін $\lambda^{(1,p+1)}(x)$ табамыз және келесі теңсіздіктерді аламыз:

$$\left\|\lambda^{(1,p+1)} - \lambda^{(1,p)}\right\|_3 \le \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^p}{p!}\left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3, \qquad (3.1.39)$$

$$\left\|\lambda^{(1,p+1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \sum_{j=0}^{p}\frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^j}{j!}\left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{p}\frac{(\gamma_1(h)hL_1\omega)^j}{j!}\left\|\lambda^{(1,1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3. \qquad (3.1.40)$$

(3.1.39)-ші бағалауға сәйкес $\{\lambda^{(1,p)}(x)\}$ тізбегі $C([0,\omega], R^{n(N+1)})$ кеңістік нормасы бойынша (3.1.25) теңдігінің шешіміне жинақталады. (3.1.28)-ді ескере отырып, (3.1.40)-қа $p \to \infty$ шекке көшсек,

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \tilde{v}^{(0)}\right)\right\| \qquad (3.1.41)$$

бағалауы орынды, осыдан (3.1.30), (3.1.24) теңсіздіктер негізінде

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \gamma_1(h)he^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\frac{(L_1\omega + L_2)h}{1-(L_1\omega + L_2)h}\max_{r=\overline{1,N}}\widetilde{K}_r \qquad (3.1.42)$$

бағалауы орындалады.

3.1.2-ші шарт және теореманың (II) теңсіздігі бойынша, $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$ болғанда (3.1.3), (3.1.4) дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің $\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)$ $(r = \overline{1,N})$ жалғыз шешімі бар болады және $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t))$ функциялар жүйесі компоненттері келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| =$$

$$= \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(\tau) + \int\limits_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi,\tau)d\xi\,, \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau)\right)d\tau -$$

$$- \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,\tau)d\xi\,, \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right)d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} \left(L_1 \int\limits_0^x \left(\left\|\lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\right\| + \left\|\tilde{v}_r^{(1)}(\xi,\tau) - \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,\tau)\right\|\right)d\xi + \right.$$

$$\left. + L_2\left(\left\|\lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x)\right\| + \left\|\tilde{v}_r^{(1)}(\xi,\tau) - \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,\tau)\right\|\right)\right)d\tau \leq$$

$$\leq (L_1\omega + L_2)h\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 + (L_1\omega + L_2)h\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\|,$$
$$t \in \Omega_r(x).$$

Осыдан, төмендегі бағалау орынды

$$\left\|\tilde{v}^{(1)} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \leq \frac{(L_1\omega + L_2)h}{1 - (L_1\omega + L_2)h}\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3. \qquad (3.1.43)$$

Енді,

$$Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int\limits_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)}\right) = 0$$

теңдігін ескеріп, $\left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)}\right)\right\|$ бағалаймыз:

$$\left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)} \right) \right\| =$$

$$= \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)} \right) - Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)} \right) \right\| \le$$

$$\le (L_1\omega + L_2)h\left\|\tilde{v}^{(1)} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2. \qquad (3.1.44)$$

(3.1.43) және (3.1.44) теңсіздіктерден

$$\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)} \right) \right\| \le$$

$$\le q_1(h)\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \qquad (3.1.45)$$

бағалауы алынады. $S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1) \subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$ орындалатынын көрсетеміз. $\lambda(x) \in S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1)$ болсын, мұндағы

$$\rho_1 = \gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)} \right) \right\|.$$

Теореманың (III), (IV) теңсіздіктерін, (3.1.41) және (3.1.45) теңсіздіктерді ескере отырып,

$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \left\|\lambda - \lambda^{(1)}\right\|_3 + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 <$$

$$< \rho_1 + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le (q_1(h) + 1)\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3 <$$

$$< \frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} e^{\gamma_1(h)hL_1\omega} \max_{x\in[0,\omega]} \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)} \right) \right\| < \rho_\lambda$$

аламыз, яғни $S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1) \subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$.

Алгоритмнің екінші қадамында $\lambda^{(2)}(x)$ параметрін

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)=0. \qquad (3.1.46)$$

теңдеуден табамыз. Ол үшін алдымен, $\lambda^{(2,1,0)}(x)=\lambda^{(1)}(x)$,

$$\lambda^{(2,1,m+1)}(x)=\lambda^{(2,1,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,1,m)}(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\, Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,1,m)}(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right),\quad m=0,1,2,\ldots,\quad x\in[0,\omega],$$

итерациялық процесті қолдана отырып,

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)=0 \qquad (3.1.47)$$

теңдеулер жүйесінің шешімін анықтаймыз.

(3.1.47) теңдеудің шешімі $\lambda^{(2,1)}(x)$ болып табылады, оның бағалауы

$$\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)\right\|=$$

$$=\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)-Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(1)}(x),\int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\|\leq$$

$$\leq\max_{r=\overline{1,N}}\left\|\int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi+\int_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^{(1)}(x)+\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)\right)dt-\right.$$

$$\left.-\int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi+\int_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^{(1)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right)dt\right\|\leq$$

$$\leq(L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(1)}-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2,$$

$$\left\|\lambda^{(2,1)}-\lambda^{(1)}\right\|_3 \le \gamma_1(h)(L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(1)}-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2.$$

Енді,

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^{(2,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)=0 \qquad (3.1.48)$$

теңдеулер жүйесінің шешімі келесі итерациялық процесс бойынша анықталады:

$$\lambda^{(2,2,0)}(x)=\lambda^{(2,1)}(x),$$

$$\lambda^{(2,2,m+1)}(x)=\lambda^{(2,2,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,2,m)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(2,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\, Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,2,m)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(2,1)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right),\quad m=0,1,2,\dots,\quad x\in[0,\omega].\ (3.1.49)$$

1-ші теорема [28, 41 б.] бойынша (3.1.49)-шы итерациялық процесс $S(\lambda^{(1)}(x),\rho_1)$ жиынында (3.1.48)-ші теңдеудің $\lambda^{(2,2)}(x)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және

$$\left\|\lambda^{(2,2)}-\lambda^{(2,1)}\right\|_3 \le \gamma_1(h)hL_1x\left\|\lambda^{(2,1)}-\lambda^{(1)}\right\|_3$$

бағалауы орындалады.

Әрі қарай, теңдеулер жүйесінің шешімін табамыз

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int\limits_0^x \lambda^{(2,2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)=0. \qquad (3.1.50)$$

Ол үшін итерациялық процесс құрамыз: $\lambda^{(2,3,0)}(x)=\lambda^{(2,2)}(x)$,

$$\lambda^{(2,3,m+1)}(x)=\lambda^{(2,3,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,3,m)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(2,2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\, Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2,3,m)}(x),\int\limits_0^x \lambda^{(2,2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(1)}\right),\qquad m=0,1,2,\dots.\qquad (3.1.51)$$

1-ші теорема [28, 41 б.] бойынша (3.1.51)-шы итерациялық процесі $S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1)$ жиынында (3.1.50)-ші теңдеудің $\lambda^{(2,3)}(x)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және келесі бағалау орындалады

$$\left\|\lambda^{(2,3)} - \lambda^{(2,2)}\right\|_3 \leq \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^2}{2!}\left\|\lambda^{(2,1)} - \lambda^{(1)}\right\|_3.$$

Осылай жалғастыра отырып, әрбір $x \in [0, \omega]$ үшін $\lambda^{(2,p+1)}(x)$ табамыз және келесі теңсіздіктерді анықтаймыз:

$$\left\|\lambda^{(2,p+1)} - \lambda^{(2,p)}\right\|_3 \leq \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^p}{p!}\left\|\lambda^{(2,1)} - \lambda^{(1)}\right\|_3, \tag{3.1.52}$$

$$\left\|\lambda^{(2,p+1)} - \lambda^{(1)}\right\|_3 \leq \sum_{j=0}^{p} \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^j}{j!}\left\|\lambda^{(2,1)} - \lambda^{(1)}\right\|_3 \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p} \frac{(\gamma_1(h)hL_1\omega)^j}{j!}\left\|\lambda^{(2,1)} - \lambda^{(1)}\right\|_3. \tag{3.1.53}$$

(3.1.52)-ге сәйкес $\{\lambda^{(2,p)}(x)\}$ тізбегі $C([0, \omega], R^{n(N+1)})$ кеңістігінің нормасы бойынша (3.1.46)-шы теңдеудің шешіміне жинақталады. (3.1.53)-де $p \to \infty$ шегіне көшіп, төмендегі бағалауды аламыз

$$\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\|_3 \leq \gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega} \max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)}\right)\right\|$$

осыдан (3.1.45) ескере отырып, бағалаудың дұрыстығын анықтаймыз

$$\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\|_3 \leq q_1(h)\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|_3.$$

3.1.2-ші шарт және теореманың (ІІ) теңсіздігі бойынша, (3.1.3), (3.1.4) дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(2)}(x)$ болғанда $\tilde{v}_r^{(2)}(x,t)$ $(r = \overline{1,N})$ жалғыз шешімі бар болады және $\tilde{v}^{(2)}(x,[t]) = (\tilde{v}_1^{(2)}(x,t), \dots, \tilde{v}_N^{(2)}(x,t))$ теңдеулер жүйесі компоненттері

$$\left\|\tilde{v}_r^{(2)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(1)}(x,t)\right\| =$$

$$= \left\| \int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^{(2)}(\xi,\tau)d\xi\,, \lambda_r^{(2)}(x) + \tilde{v}_r^{(2)}(x,\tau) \right) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi,\tau)d\xi\,, \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau) \right) d\tau \right\| \le$$

$$\le \int_{(r-1)h}^{t} \left(L_1 \int_0^x \left(\left\| \lambda_r^{(2)}(\xi) - \lambda_r^{(1)}(\xi) \right\| + \left\| \tilde{v}_r^{(2)}(\xi,\tau) - \tilde{v}_r^{(1)}(\xi,\tau) \right\| \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + L_2 \left(\left\| \lambda_r^{(2)}(x) - \lambda_r^{(1)}(x) \right\| + \left\| \tilde{v}_r^{(2)}(x,\tau) - \tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau) \right\| \right) \right) d\tau \le$$

$$\le (L_1\omega + L_2)h \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\|_3 + (L_1\omega + L_2)h \left\| \tilde{v}_r^{(2)}(x,t) - \tilde{v}_r^{(1)}(x,t) \right\|, t \in \Omega_r(x)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Бұдан,

$$\left\| \tilde{v}^{(2)} - \tilde{v}^{(1)} \right\|_2 \le \frac{(L_1\omega + L_2)h}{1 - (L_1\omega + L_2)h} \left\| \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \right\|_3 \qquad (3.1.54)$$

бағалауын аламыз.

$\left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(2)}(x), \int_0^x \lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(2)}\right) \right\|$ бағалаймыз.

$Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(2)}(x), \int_0^x \lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)}\right) = 0$ теңдігін ескерсек,

$$\left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(2)}(x), \int_0^x \lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(2)} \right) \right\| =$$

$$= \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(2)}(x), \int_0^x \lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(2)} \right) - Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(2)}(x), \int_0^x \lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(1)} \right) \right\| \le$$

$$\le (L_1\omega + L_2)h \left\| \tilde{v}^{(2)} - \tilde{v}^{(1)} \right\|_2 \qquad (3.1.55)$$

бағалауы орындалады. (3.1.54) және (3.1.55)-ті қолдана отырып

$$\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2)}(x),\int_0^x\lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(2)}\right)\right\|\le$$

$$\le q_1(h)\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|_3\ \le (q_1(h))^2\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 \qquad (3.1.56)$$

бағалауын аламыз.

$S(\lambda^{(2)}(x),\rho_2)\subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ көрсетейік. Айталық, $\lambda(x)\in S(\lambda^{(2)}(x),\rho_2)$ болсын, мұндағы

$$\rho_2=\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(2)}(x),\int_0^x\lambda^{(2)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(2)}\right)\right\|$$

Теореманың (III) және (IV) теңсіздіктерін, (3.1.41) және (3.1.56)-ны ескерсек

$$\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\|_3\le\left\|\lambda-\lambda^{(2)}\right\|_3+\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\|_3+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3<$$

$$<\rho_2+q_1(h)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3\le$$

$$\le(q_1^2(h)+q_1(h)+1)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3<\tfrac{1}{1-q_1(h)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3<\rho_\lambda,$$

яғни $S(\lambda^{(2)}(x),\rho_2)\subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$.

Айталық, $\lambda^{(k-1)}(x)\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ және $\tilde{v}^{(k-1)}(x,[t])\in S(v^{(0)}(x,[t]),\rho_v)$ анықталған болсын және

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3\le q_1(h)\left\|\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right\|_3,$$

$$\left\|\tilde{v}^{(k-1)}-\tilde{v}^{(k-2)}\right\|_2\le\frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3 \qquad (3.1.57)$$

теңсіздіктері орындалсын. Онда,

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x\lambda^{(k,p)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k-1)}\right)=0$$

теңдеуінен $\lambda^{(k,p+1)}(x)$ -ді ретімен таба отырып,

$$Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k-1)}\right)=0$$

теңдеуінен $\lambda^{(k)}(x)$ -ны $\{\lambda^{(k,p+1)}(x)\}$ параметрлер тізбегінің шегі ретінде табамыз, мұндағы $p=0,1,2,\ldots$, $\lambda^{(k,0)}(x)=\lambda^{(k-1)}(x)$. Келесі бағалауларды анықтайық:

$$\left\|\lambda^{(k,1)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 \le \gamma_1(h)(L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(k-1)}-\tilde{v}^{(k-2)}\right\|_2,$$

$$\left\|\lambda^{(k,p+1)}-\lambda^{(k,p)}\right\|_3 \le \frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^p}{p!}\left\|\lambda^{(k,1)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3,$$

$$\left\|\lambda^{(k,p+1)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 \le \sum_{j=0}^{p}\frac{(\gamma_1(h)hL_1x)^j}{j!}\left\|\lambda^{(k,1)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3. \qquad (3.1.58)$$

(3.1.58)-шы теңсіздіктен $p\to\infty$ ұмтылғанда

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 \le q_1(h)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|_3. \qquad (3.1.59)$$

$\tilde{v}^{(k)}(x,[t])=(\tilde{v}_1^{(k)}(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^{(k)}(x,t))$ функциялар жүйесінің компоненттері барлық $r=\overline{1,N}$ үшін төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандырады

$$\left\|\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\right\|=$$

$$=\left\|\int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r^{(k)}(\xi)d\xi+\int_0^x \tilde{v}_r^{(k)}(\xi,\tau)d\xi\,,\lambda_r^{(k)}(x)+\tilde{v}_r^{(k)}(x,\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$-\int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r^{(k-1)}(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^x \tilde{v}_r^{(k-1)}(\xi,\tau)d\xi\,,\lambda_r^{(k-1)}(x)+\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,\tau)\right)\right\|\le (L_1\omega+L_2)h\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3+$$

$$+(L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\right\|.$$

Осыдан:

$$\left\|\tilde{v}^{(k)}-\tilde{v}^{(k-1)}\right\|_2 \leq \frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3. \qquad (3.1.60)$$

$\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k)}\right)\right\|$ бағалайық:

$$\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k)}\right)\right\| =$$

$$= \left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k)}\right) - Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k-1)}\right)\right\| \leq$$

$$\leq (L_1\omega+L_2)h\left\|\tilde{v}^{(k)}-\tilde{v}^{(k-1)}\right\|_2, \qquad (3.1.61)$$

себебі $Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k-1)}\right)=0$.

(3.1.57), (3.1.59) және (3.1.61) бағалаулардан келесі теңсіздікті аламыз

$$\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k)}\right)\right\| \leq$$

$$\leq q_1(h)\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3 \leq (q_1(h))^k\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3. \qquad (3.1.62)$$

$S(\lambda^{(k)}(x),\rho_k)\subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ орындалатынын көрсетейік.

$\lambda(x)\in S(\lambda^{(k)}(x),\rho_k)$ болсын, мұндағы

$$\rho_k=\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi\,,\tilde{v}^{(k)}\right)\right\|.$$

Теореманың (III) және (IV) теңсіздіктерін, (3.1.62)-ші бағалауды ескерсек,

$$\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\|_3 \leq \left\|\lambda-\lambda^{(k)}\right\|_3+\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\|_3+\cdots+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 < \rho_2 +$$

$$+(q_1(h))^{k-1}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3+(q_1(h))^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3+\cdots+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 \leq$$

$$\leq \left((q_1(h))^k+(q_1(h))^{k-1}+(q_1(h))^{k-2}+\cdots+1\right)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 <$$

$$< \frac{1}{1-q_1(h)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 < \rho_\lambda,$$

$$\left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 \le \left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k+\ell-1)}\right\|_3+\left\|\lambda^{(k+\ell-1)}-\lambda^{(k+\ell-2)}\right\|_3+\cdots+$$

$$+\left\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 \le \left((q_1(h))^{\ell-1}+(q_1(h))^{\ell-2}+\cdots+1\right)\left\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 \le$$

$$\le \frac{1}{1-q_1(h)}\left\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 < \frac{(q_1(h))^{k+1}}{1-q_1(h)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|_3 < \rho_\lambda,$$

яғни $S(\lambda^{(k)}(x),\rho_k) \subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$.

Егер $\rho_k = 0$, онда $Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(k)}(x),\int_0^x \lambda^{(k)}(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(k)}\right)=0$.

$\Omega_r(x)$-та $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(k)}(x)$ $(r=\overline{1,N})$ болғанда $\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)$ (3.1.3), (3.1.4) есебінің шешімі болатындығын ескере отырып

$$g\left(x,\lambda_1^{(k)}(x),\lambda_{N+1}^{(k)}(x)\right)=0, \quad x\in[0,\omega],$$

$$\lambda_r^{(k)}(x)+\lim_{t\to rh-0}\tilde{v}_r(x,t)-\lambda_{r+1}^{(k)}(x)=0, \;\; r=\overline{1,N}$$

теңдіктерді аламыз, яғни $\lambda^{(k)}(x)$ параметр және $\tilde{v}^{(k)}(x,[t])$ функциялар жүйесінің жиынтығы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болады.

(3.1.59), (3.1.60) және теореманың (III), (IV), (V) теңсіздіктерінен $\{\lambda^{(k)}(x)\}_{k=0}^{\infty} \in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ $k\to\infty$ ұмтылғанда $\lambda^*(x)\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ жинақталады, $\{\tilde{v}^{(k)}(x,[t])\}_{k=0}^{\infty}\in S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$ тізбегі $\tilde{v}^*(x,[t])\in S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$-ға жинақталады. Сонымен қатар, $\lambda^*(x)$ функционалдық параметрінің және $\tilde{v}^*(x,[t])$ функциялар жүйесінің жиынтығы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болып табылады.

(3.1.59), (3.1.60) ескере отырып, барлық k және ℓ үшін

$$\left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k)}\right\|_3 < \frac{q_1^{k+1}(h)}{1-q_1(h)}\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\times$$

$$\times\max_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}\left(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x\lambda^{(0)}(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(0)}\right)\right\|,$$

$$\left\|\tilde{v}^{(k+\ell)}-\tilde{v}^{(k)}\right\|_2 \le \frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\left\|\lambda^{(k+\ell)}-\lambda^{(k)}\right\|_3.$$

Соңғы теңсіздіктерде $\ell\to\infty$ шекке көшсек, теореманың (3.1.18), (3.1.19) бағалауларын аламыз.

Шешімнің оқшаулануын дәлелдейік.

$\hat{\lambda}(x)\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)$ параметрі және $\hat{\tilde{v}}(x,[t])\in S(v^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})$ функциялар жүйесінің жиынтығы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болсын. Онда

$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ сандары табылады:

$$\left\|\hat{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\|_3 + \delta_1 < \rho_\lambda, \qquad \frac{(L_1\omega + L_2)h}{1 - (L_1\omega + L_2)h}\left\|\hat{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\|_3 + \delta_2 < \rho_v.$$

$\hat{\tilde{v}}_r(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \hat{\lambda}_r(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi, \hat{\lambda}_r(x) + \tilde{v}_r\right),$$
$$t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N},$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1,N}$$

Коши есебін қанағаттандырады, ал $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) + \tilde{v}_r\right),$$
$$t \in \Omega_r(x), r = \overline{1,N},$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1,N},$$

Коши есебін қанағаттандырады, сондықтан келесі бағалау орынды

$$\left\|\hat{\tilde{v}} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le \frac{(L_1\omega + L_2)h}{1 - (L_1\omega + L_2)h}\left\|\hat{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\|_3.$$

Кез келген $\lambda(x) \in S(\hat{\lambda}(x), \delta_1), v(x,[t]) \in (\hat{\tilde{v}}(x,[t]), \delta_2)$ алайық. Онда,

$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\|_3 \le \left\|\lambda - \hat{\lambda}\right\|_3 + \left\|\hat{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\|_3 < \delta_1 + \left\|\hat{\lambda} - \lambda^{(0)}\right\|_3 < \rho_\lambda,$$

$$\left\|\tilde{v} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le \left\|\tilde{v} - \hat{\tilde{v}}\right\|_2 + \left\|\hat{\tilde{v}} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 < \delta_2 + \left\|\hat{\tilde{v}} - \tilde{v}^{(0)}\right\|_2 < \rho_v$$

теңсіздіктерінен $S(\hat{\lambda}(x), \delta_1) \subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$, $S(\hat{\tilde{v}}(x,[t]), \delta_2) \subset S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho_{\tilde{v}})$ шығады. Енді,

$$\varepsilon\gamma_1(h) < \frac{1}{2}, \qquad 2q_1(h) < \big(1 - \varepsilon\gamma_1(h)\big)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega} \qquad (3.1.63)$$

теңсіздіктері орындалатындай $\varepsilon > 0$ санын алайық.

$\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}$, $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}$, $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}$ функцияларының сәйкесінше $G_1(x,\rho_u,\rho_v)$, $G_2(x,\rho_\lambda,\rho_v)$ жиындарында бірқалыпты үзіліссіздігінен және $\frac{\partial Q_{1,h}(x,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\tilde{v})}{\partial \widetilde{w}_1}$ Якоби матрицасының құрылымынан $S(\hat{\lambda}(x),\delta_1)\times S(\hat{\tilde{v}}(x,[t]),\delta_2)$ жиынында шешімнің бірқалыпты үзіліссіздігі шығады. Барлық $\lambda(x)\in S(\hat{\lambda}(x),\delta)$ параметрлер және $\tilde{v}(x,[t])\in S(\hat{\tilde{v}}(x,[t]),\delta)$ функциялар жүйесі жиынтығы үшін

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}\right)-\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\hat{\lambda}(x),\int_0^x \hat{\lambda}(\xi)d\xi\,,\hat{\tilde{v}}\right)\right\|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ санын табамыз.

$$Q_{1,h}\left(x,\hat{\lambda}(x),\int_0^x \hat{\lambda}(\xi)d\xi\,,\hat{\tilde{v}}\right)=0$$

болады, себебі $\hat{\lambda}(x)\in S(\hat{\lambda}(x),\delta)$ функционалдық параметрлер және $\hat{\tilde{v}}(x,[t])\in S(\hat{\tilde{v}}(x,[t]),\delta)$ функциялар жүйесінің жиынтығы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің шешімі болып табылады.

Айталық, $\tilde{\lambda}(x)\in S(\hat{\lambda}(x),\delta)$ функционалдық параметрлер және $\tilde{\tilde{v}}(x,[t])\in S(\hat{\tilde{v}}(x,[t]),\delta)$ функциялар жүйесі жиынтығы (3.1.3)-(3.1.6) есебінің басқа шешімі болсын.

$$Q_{1,h}\left(x,\hat{\lambda}(x),\int_0^x \hat{\lambda}(\xi)d\xi\,,\hat{\tilde{v}}\right)=0$$

және

$$Q_{1,h}\left(x,\tilde{\lambda}(x),\int_0^x \tilde{\lambda}(\xi)d\xi\,,\tilde{\tilde{v}}\right)=0$$

болғандықтан,

$$\hat{\lambda}(x)=\hat{\lambda}(x)-\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\hat{\lambda}(x),\int_0^x \hat{\lambda}(\xi)d\xi\,,\hat{\tilde{v}}\right)\right)^{-1}Q_{1,h}\left(x,\hat{\lambda}(x),\int_0^x \hat{\lambda}(\xi)d\xi\,,\hat{\tilde{v}}\right),$$

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}(x) - \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \hat{\lambda}(x), \int_0^x \hat{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right)\right)^{-1} Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x), \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi) d\xi, \tilde{\tilde{v}}\right),$$

теңдіктерінен

$$\hat{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \hat{\lambda}(x), \int_0^x \hat{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x) + \theta(\hat{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(x)), \int_0^x \left(\tilde{\lambda}(\xi) + \theta(\hat{\lambda}(\xi) - \tilde{\lambda}(\xi))\right) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \hat{\lambda}(x), \int_0^x \hat{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right)\right) d\theta\left(\hat{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(x)\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \hat{\lambda}(x), \int_0^x \hat{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right)\right)^{-1} \left(Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x), \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right) -\right.$$

$$\left. - Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x), \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi) d\xi, \tilde{\tilde{v}}\right)\right)$$

теңдігін аламыз. Бұдан, келесі бағалау орынды

$$\left\|\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}\right\|_3 \leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \times$$

$$\times \left\| Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x), \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi) d\xi, \hat{\tilde{v}}\right) - Q_{1,h}\left(x, \tilde{\lambda}(x), \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi) d\xi, \tilde{\tilde{v}}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} (L_1\omega + L_2) h \left\|\hat{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{v}}\right\|_2. \qquad (3.1.64)$$

Функция $\tilde{\tilde{v}}_r(x,t)$ келесі Коши есебін қанағаттандырады

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \tilde{\lambda}(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi\,, \tilde{\lambda}(x) + \tilde{v}_r\right), \quad t \in \Omega_r(x),$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,N},$$

сондықтан,

$$\left\|\hat{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{v}}\right\|_2 \le \frac{(L_1\omega + L_2)h}{1 - (L_1\omega + L_2)h}\left\|\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}\right\|_3. \tag{3.1.65}$$

(3.1.65) теңсіздігін (3.1.64)-тің оң жағына қойсақ,

$$\left\|\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}\right\|_3 \le \frac{q_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} e^{-\gamma_1(h)hL_1\omega}\left\|\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}\right\|_3$$

орындалады, осыдан (3.1.63) теңсіздіктерін ескерсек, $\hat{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}(x)$, $\hat{\tilde{v}}(x,[t]) = \tilde{\tilde{v}}(x,[t])$ теңдіктерінің орындалатындығына көз жеткіземіз.

Теорема 3.1.1 дәлелденді.

x параметрі $[0,\omega]$ -дағы кез-келген нүкте болғандықтан алынған барлық $x \in [0,\omega]$ үшін орындалады.

k -қадамда анықталған $\lambda^{(k)}(x)$ параметрі мен $\tilde{v}^{(k)}(x,[t]))$ функциялар жүйесінің жиынтығы бойынша үзінді-үзіліссіз дифференциалданатын функцияны анықтаймыз

$$v^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & t = T. \end{cases}$$

Ескерту 3.1.1 *Теорема 3.1.1 шарты ұсынылған алгоритмнің орындалуы және жинақталуының жеткілікті шарты болып табылады.*

(3.1.3)-(3.1.6) және (3.1.1), (3.1.2) есептерінің эквиваленттілігіне байланысты келесі тұжырым орынды болады.

Теорема 3.1.2 *Кейбір $h > 0 \colon Nh = T$ $(N = 1,2,\dots)$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_{\tilde{v}} > 0$, $\rho_v > 0$ үшін 3.1.1-ші теореманың барлық шарттары орындалсын. Онда кез келген $x \in [0,\omega]$ үшін $(v^{(k)}(x,[t]) \in S(v^{(0)}(x,t),\rho_v)$ функциялар тізбегі $S(v^{(0)}(x,t),\rho_V)$ жиынында (3.1.1), (3.1.2) есебінің $v^*(x,t)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және келесі бағалау орындалады:*

$$\max_{x\in[0,\omega]} \sup_{t\in\Omega_r(x)} \left\|v^*(x,t) - v^{(0)}(x,t)\right\| \le$$

$$\leq \frac{h^2 \cdot \gamma_1(h)}{1-q_1(h)} e^{h\gamma_1(h)L_1\omega} \frac{(L_1\omega + L_2)}{\big(1-h(L_1\omega+L_2)\big)^2} \max_{r=\overline{1,N}} \widehat{K}_r\,,$$

мұндағы

$$\widehat{K}_r = \max_{x\in[0,\omega]} \sup_{t\in\Omega_r(x)} \|f(x,t,\psi(t) +$$

$$+\int_0^x (v^{(0)}(\xi,t) - v^{(0)}(\xi,(r-1)h))d\xi\,, (v^{(0)}(x,t) - v^{(0)}(x,(r-1)h))\|, r=\overline{1,N}.$$

3.2 «Оқшауланған» шешімнің бастапқы деректерге үзіліссіз тәуелділігі

$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v})$ матрицасы келесі түрде анықталады

$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}) =$

$$= \begin{pmatrix} h\cdot g\big(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)\big) \\ \lambda_1(x) + \int_0^h f\left(x,t,\int_0^x \lambda_1(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_1(\xi,t)d\xi\,, \lambda_1 + \tilde{v}_1(x,t)\right)dt \\ \lambda_2(x) + \int_h^{2h} f\left(x,t,\int_0^x \lambda_2(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_2(\xi,t)d\xi\,, \lambda_2 + \tilde{v}_2(x,t)\right)dt \\ \ldots \\ \lambda_N(x) + \int_{(N-1)h}^{Nh} f\left(x,t,\int_0^x \lambda_N(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_N(\xi,t)d\xi\,, \lambda_N + \tilde{v}_N(x,t)\right)dt \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \\ \ldots \\ \lambda_{N+1}(x) \end{pmatrix}$$

Белгілеулер енгізіледі:

$$B(x) = \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\bigg|_{\substack{w_1=\lambda_1(x)\\ w_2=\lambda_{N+1}(x)}}\,, \quad C(x) = \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\bigg|_{\substack{w_1=\lambda_1(x)\\ w_2=\lambda_{N+1}(x)}}\,,$$

$$\Phi(x,t) = \frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}\Big|_{\substack{u=\int_0^x (\lambda_i(\xi)+\tilde{v}_i(\xi,t))d\xi \\ v=\lambda_i(x)+\tilde{v}_i(x,t)}},$$

$$\Psi(x,t) = \frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}\Big|_{\substack{u=\int_0^x (\lambda_i(\xi)+\tilde{v}_i(\xi,t))d\xi \\ v=\lambda_i(x)+\tilde{v}_i(x,t)}}.$$

Онда, $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v})$ матрицасының Якоби матрицасы келесі түрде жазылады

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} B(x) & O & O & \cdots & O & C(x) \\ p_{2,1}(x) & -I & O & \cdots & O & O \\ O & p_{3,2}(x) & -I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & p_{N+1,N}(x) & -I \end{pmatrix}, \qquad (3.2.1)$$

мұндағы $p_{i,i-1}(x) = I + \int_{(i-1)h}^{ih} (\Phi(x,t)\cdot\int_0^x d\xi + \Psi(x,t))\,dt,\ i=\overline{2,N+1}.$

(3.1.1), (3.1.2) есебімен қатар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі сызықтық емес шеттік есептер әулетін қарастыралық

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{f}\left(x,t,\tilde{\psi}(t)\int_0^x v(\xi,t)d\xi\,,v\right),\quad v\in R^n,\quad (x,t)\in[0,\omega]\times[0,T], \qquad 3.2.2)$$

$$\tilde{g}(x,v(x,0),v(x,T)) = 0,\quad x\in[0,\omega], \qquad (3.2.3)$$

мұндағы x–әулет параметрі, $x\in[0,\omega]$, $\tilde{f}:[0,\omega]\times[0,T]\times R^{2n}\to R^n$, $\tilde{g}:[0,\omega]\times R^n\times R^n\to R^n$ үзіліссіз функциялар.

Үзіліссіз дифференциалданатын деректері бар шеттік есептердің «оқшауланған» шешімінің келесі анықтамасы оқшаулау анықтамасының модификациясы болып табылады.

$$G_f^*(x,\rho_0) = \{(x,t,u,v):(x,t)\in[0,\omega]\times[0,T],\left\|u-\int_0^x v^*(\xi,t)d\xi\right\|<\rho_0,$$
$$\|v-v^*(x,t)\|<\rho_0\},$$

$$G_g^*(x,\rho_0) = \{(x,w_1,w_2):\|w_1-v^*(x,0)\|<\rho_0,\|w_2-v^*(x,T)\|<\rho_0\}$$

Шарт 3.2.1 *Кейбір $\rho_0 > 0$ үшін төмендегі тұжырымдар дұрыс:*

1) $f(x,t,u,v)$ функциясы $G_f^*(x,\rho_0)$ облысында үзіліссіз;
2) $f(x,t,u,v)$ функциясының $G_f^*(x,\rho_0)$ облысында бірқалыпты үзіліссіз $\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}$ дербес туындылары бар;
3) $g(x,w_1,w_2)$ функциясы $G_g^*(x,\rho_0)$ облысында үзіліссіз;
4) $g(x,w_1,w_2)$ функциясының $G_g^*(x,\rho_0)$ облысында бірқалыпты үзіліссіз $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}$, $\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}$ дербес туындылары бар.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықтық шеттік есептер әулетін қарастырайық:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x v^*(\xi,t)d\xi\,, v^*(x,t)\right)}{\partial v}\cdot v(x,t) +$$

$$+\frac{\partial f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x v^*(\xi,t)d\xi\,, v^*(x,t)\right)}{\partial u}\int_0^x v(\xi,t)d\xi + \varphi(x,t),$$

$$(x,t)\in[0,\omega]\times(0,T), \qquad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial g(x,v^*(x,0),v^*(x,T))}{\partial w_1}v(x,0) + \frac{\partial g(x,v^*(x,0),v^*(x,T))}{\partial w_2}v(x,T) = d(x),$$
$$x\in[0,\omega], \qquad (3.2.5)$$

мұндағы $\varphi(x,t)\in C([0,\omega]\times[0,T],R^n)$, $d(x)\in C([0,\omega],R^n)$.

Анықтама 3.2.1 *$v^*(x,t)$ функциясы әрбір $x\in[0,\omega]$ сәйкес (3.2.2), (3.2.3) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі сызықтық емес шеттік есептер әулетінің "оқшауланған" шешімі деп аталады, егер $\rho_0 > 0$ саны табылып, f пен g функциялары ρ_0-ға сәйкес $G_f^*(x,\rho_0)$ және $G_g^*(x,\rho_0)$ жиындарында 3.2.1 шартын қанағаттандырып, кез келген $\varphi(x,t)\in C([0,\omega]\times[0,T],R^n)$ және $d(x)\in C([0,\omega],R^n)$ функциялары үшін (3.2.4), (3.2.5) сызықтық шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімі бар болса.*

$v^*(x,t)$ – (3.2.2), (3.2.3) есебінің "оқшауланған" шешімі болсын және $\lambda_r^*(x) = v^*(x,(r-1)h)$, $\tilde{v}_r^*(t) = v_r^*(x,t) - \lambda_r^*(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, $\lambda_{N+1}^*(x) = \lim\limits_{t\to T-0} v_N^*(x,t)$. "Оқшауланған" шешімнің анықтамасы бойынша

$$\left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}\right\| \le L_1, \qquad \left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}\right\| \le L_2 \qquad (x,t,u,v)\in G_f^*(x,\rho_{u_0},\rho_{v_0}),$$

$$\left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right\| \le L_3, \qquad \left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right\| \le L_4, \qquad (x,w_1,w_2)\in G_g^*(x,\rho_{\lambda_0}),$$

және (3.2.4), (3.2.5) есебінің жалғыз шешімі бар, мұндағы $\rho_{u_0} > 0$, $\rho_{v_0} > 0$, $\rho_{\lambda_0} > 0$, L_i –теріс емес сандар ($i = \overline{1,4}$).

Теорема 3.2.1 *$v^*(x,t)$ – (3.1.1), (3.1.2) есебінің "оқшауланған" шешімі болсын және $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ функциялары сәйкесінше $G_f^*(x,\rho_u,\rho_v)$, $G_g^*(x,\rho_\lambda)$ жиындарында*

$$\left\|\tilde{f}(x,t,u,v) - f(x,t,u,v)\right\| \le \varepsilon_1,$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,u,v)}{\partial u} - \frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}\right\| \le \varepsilon_2, \quad \left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,u,v)}{\partial v} - \frac{\partial f(x,t,u,v}{\partial v})\right\| \le \varepsilon_3,$$

$$\|\tilde{g}(x,w_1,w_2) - g(x,w_1,w_2)\| \le \varepsilon_4,$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_1} - \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_1}\right\| \le \varepsilon_5, \quad \left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_2} - \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_2}\right\| \le \varepsilon_6,$$

ε_i - const, $i = \overline{1,6}$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial \tilde{f}(x,t,u,v)}{\partial v}$, $\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_1}$, $\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial \widetilde{w}_2}$ үзіліссіз дербес туындылары бар болсын.

Онда

1) $\gamma_1(h) \cdot h \cdot max\{\varepsilon_5 + \varepsilon_6, \varepsilon_2 + \varepsilon_3\} < \frac{1}{4}$,

2) $\gamma_1(h)h^2 e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)h(L_1+\varepsilon_2)\omega} \frac{((L_1+\varepsilon_2)\omega+(L_2+\varepsilon_3))h}{1-((L_1+\varepsilon_2)\omega+(L_2+\varepsilon_3))h} < \frac{1}{4}$,

3) $e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)h\varepsilon_2\omega} < 2$,

4) $4\gamma_1(h)\frac{(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h^2}{1-(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h} max\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\} < \rho_1$,

теңсіздіктерінің орындалуынан (3.2.2), (3.2.3) есебі $S(v^*(x,t),\rho_1)$ жиынында $\tilde{v}(x,t)$ "оқшауланған" шешімі бар болады және келесі бағалау орындалады

$$\max_{t\in[0,T]}\|\tilde{v}(x,t) - v^*(x,t)\| \le 4\gamma_1(h)h^2 e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)hL_1\omega} \frac{(\tilde{L}_1\omega + \tilde{L}_2)h}{1-(\tilde{L}_1\omega + \tilde{L}_2)h} max\{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}.$$

Дәлелдеуі. 3.1.1 теоремасының шарттарының орындалуынан барлық $(\lambda(x), v(x,[t]) \in S(\lambda^*(x),\rho_1) \times S(v^*(x,[t]),\rho_1)$ үшін $\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \tilde{v})$ Якоби матрицасының кері матрицасы бар және келесі бағалау орынды

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h} \left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi) d\xi, \tilde{v} \right) \right)^{-1} \right\| \leq \gamma_1(h)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} \tilde{Q}_{1,h} \left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi) d\xi, \tilde{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h} \left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi) d\xi, \tilde{v} \right) \right\| =$$

$$= max\{ h \cdot \left\{ \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \widetilde{w}_1} (x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) - \frac{\partial g}{\partial \widetilde{w}_1} (x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \widetilde{w}_2} (x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) - \frac{\partial g}{\partial \widetilde{w}_2} (x, \lambda_1(x), \lambda_{N+1}(x)) \right\| \right\},$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \left(x, t, \tilde{\psi}(t) + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r + \tilde{v}_r(x,t) \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial u} \left(x, t, \psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r + \tilde{v}_r(x,t) \right) \right] dt +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \left(x, t, \tilde{\psi}(t) + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r + \tilde{v}_r(x,t) \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial f}{\partial v} \left(x, t, \psi(t) + \int\limits_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int\limits_0^x \tilde{v}_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r + \tilde{v}_r(x,t) \right) \right] dt \right\| \right\} \leq$$

$$\leq max\{ h(\varepsilon_5 + \varepsilon_6), (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)h \} \leq h \cdot max\{ \varepsilon_5 + \varepsilon_6, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \},$$

$$\gamma_1(h) \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} \tilde{Q}_{1,h} \left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi) d\xi, \tilde{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h} \left(x, \lambda(x), \int\limits_0^x \lambda(\xi) d\xi, \tilde{v} \right) \right\| \leq$$

$$\leq \gamma_1(h) \cdot h \cdot max\{ \varepsilon_5 + \varepsilon_6, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \}.$$

Аз ауытқулар теоремасы [115] бойынша және теореманың 1)-ші теңсіздігіне байланысты $\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1}\tilde{Q}_{1,h}(x,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\tilde{v})$ матрицасының кері матрицасы бар болады және

$$\left\|\left(\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(x,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\tilde{v})}{\partial \widetilde{w}_1}\right)^{-1}\right\| \le \tilde{\gamma}_1(h) = \frac{4}{3}\gamma_1(h)$$

теңсіздігі орындалады.

Таңдауымыз бойынша $\varepsilon_2 > 0$, $exp(\,(\alpha+\varepsilon_2)h)\rho_1 < \rho_0$, онда барлық $(x,t,u,v) \in \in G_f^*(x,\rho_u,\rho_v)$ үшін

$$\left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,u,v)}{\partial u}\right\| \le \left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,,u,v)}{\partial u} - \frac{\partial f(x,t,,u,v)}{\partial u}\right\| + \left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial u}\right\| \le \tilde{L}_1,$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,u,v)}{\partial v}\right\| \le \left\|\frac{\partial \tilde{f}(x,t,,u,v)}{\partial v} - \frac{\partial f(x,t,,u,v)}{\partial v}\right\| + \left\|\frac{\partial f(x,t,u,v)}{\partial v}\right\| \le \tilde{L}_2$$

теңсіздіктері орындалады, мұндағы $\tilde{L}_1 = L_1 + \varepsilon_2$, $\tilde{L}_2 = L_2 + \varepsilon_3$.

Ал, барлық $(x,w_1,w_2) \in G_2^*(x,\rho_\lambda)$ үшін

$$\left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right\| \le \left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial w_1} - \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right\| + \left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right\| \le \tilde{L}_3,$$

$$\left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right\| \le \left\|\frac{\partial \tilde{g}(x,w_1,w_2)}{\partial w_2} - \frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right\| + \left\|\frac{\partial g(x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right\| \le \tilde{L}_4$$

теңсіздіктері орындалады, мұндағы $\tilde{L}_3 = L_3 + \varepsilon_5$, $\tilde{L}_4 = L_4 + \varepsilon_6$.

Алынған теңсіздіктерден және теореманың 2)-ші теңсіздігінен

$$\tilde{q}_1(h) = \tilde{\gamma}_1(h)e^{\tilde{\gamma}_1(h)h\tilde{L}_1\omega}\,\frac{(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)^2h^2}{1-(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h} =$$

$$= \frac{4}{3}\gamma_1(h)e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)h\tilde{L}_1\omega}\,\frac{(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)^2h^2}{1-(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h} < \frac{1}{3}$$

бағалауы орындалады.

(3.1.41)-(3.1.43) бағалаулардан (3.3.4), (3.3.5) есебінің $v^*(x,t)$ "оқшауланған" шешімі үшін

$$\left\|v^*(x,t) - v^{(0)}(x,t)\right\|_2 \le \gamma_1(h)he^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\,\frac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h} \times$$

$$\times \max_{x\in[0,\omega]} \left\| Q_{1,h}\left(x, \lambda^{(0)}(x), \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^{(0)} \right) \right\|$$

бағалауы орынды.

Мұнда $v^*(x,t)$ функциясы ретінде $\tilde{v}(x,t)$, ал $v^{(0)}(x,t)$ функциясы ретінде $v^*(x,t)$ екенін ескерсек, соңғы бағалаудан

$$\|\tilde{v}(x,t) - v^*(x,t)\|_2 \leq \tilde{\gamma}_1(h)he^{\tilde{\gamma}_1(h)h\tilde{L}_1\omega} \frac{(\tilde{L}_1\omega + \tilde{L}_2)h}{1 - (\tilde{L}_1\omega + \tilde{L}_2)h} \times$$

$$\times \max_{x\in[0,\omega]} \left\| \tilde{Q}_{1,h}\left(x, \lambda^*(x), \int_0^x \lambda^*(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^* \right) \right\|$$

бағалауы алынады.

Теореманың 4)-ші теңсіздігін және $Q_{1,h}\left(x, \lambda^*(x), \int_0^x \lambda^*(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^*\right) = 0$ теңдігін ескерсек,

$$\left\| \tilde{Q}_{1,h}\left(x, \lambda^*(x), \int_0^x \lambda^*(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^* \right) \right\| =$$

$$= \left\| \tilde{Q}_{1,h}\left(x, \lambda^*(x), \int_0^x \lambda^*(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^* \right) - Q_{1,h}\left(x, \lambda^*(x), \int_0^x \lambda^*(\xi)d\xi\,, \tilde{v}^* \right) \right\| =$$

$$= max\{\, h\|\tilde{g}(x, \lambda_1^*, \lambda_{N+1}^*) - g(x, \lambda_1^*, \lambda_{N+1}^*)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \left\| \int_{(r-1)h}^{rh} \tilde{f}\left(x, t, \tilde{\psi}(t) + \int_0^x \lambda_r^*(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^*(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^* + \tilde{v}_r^*(x,t) \right) dt - \right.$$

$$\left. - \int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x, t, \psi(t) + \int_0^x \lambda_r^*(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^*(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^* + \tilde{v}_r^*(x,t) \right) dt \right\| \Bigg\} \leq$$

$$\leq \max \left\{ h\varepsilon_4, \max_{r=\overline{1,N}} \int_{(r-1)h}^{rh} \left\| \tilde{f}\left(x, t, \tilde{\psi}(t) + \int_0^x \lambda_r^*(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^*(\xi,t)d\xi\,, \lambda_r^* + \right. \right. \right.$$

$$+\tilde{v}_r^*(x,t)\big) - f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x \lambda_r^*(\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{v}_r^*(\xi,t)d\xi\,,\lambda_r^*+\tilde{v}_r^*(x,t)\right)\Bigg\| dt\Bigg\} \le$$

$$\le h\cdot max\{\,\varepsilon_1,\varepsilon_4\},$$

таңдалған $Nh = T$ болатындай $h > 0$ саны, $\nu = 1$, $\rho_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_4 > 0$ үшін $\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(x,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\tilde{v})}{\partial \widetilde{w}_1}$ Якоби матрицасының кез келген $(\lambda(x),\tilde{v}(x,[t])\in S(\lambda^*(x),\rho_1)\times S(v^*(x,[t]),\rho_1)$ жұбы үшін кері матрицасы бар болады.

3)-ші теңсіздіктен келесі бағалау алынады:

$$\|\tilde{v}(x,t)-v^*(x,t)\| \le \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\gamma_1(h)h^2 e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)h\tilde{L}_1\omega}\frac{(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h}{1-(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h} max\{\,\varepsilon_1,\varepsilon_4\} \le$$

$$\le 4\gamma_1(h)h^2 e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)hL_1\omega}\frac{(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h}{1-(\tilde{L}_1\omega+\tilde{L}_2)h} max\{\,\varepsilon_1,\varepsilon_4\},$$

$$t\in[(r-1)h,rh), r=\overline{1,N}.$$

Бұл,

$$\max_{t\in[0,T]}\|\tilde{v}(x,t)-v^*(x,t)\| \le$$

$$\le 4\gamma_1(h)e^{\frac{4}{3}\gamma_1(h)hL_1\omega}\frac{((L_1+\varepsilon_2)\omega+L_2+\varepsilon_3)h}{1-((L_1+\varepsilon_2)\omega+L_2+\varepsilon_3)h}\cdot h^2\, max\{\,\varepsilon_1,\varepsilon_4\}$$

бағалауының дұрыстығын білдіреді.

Теорема 3.2.1 дәлелденді.

Төменде (3.2.1) матрицасының кері матрицасын есептеудің бір тәсілі ұсынылады. (3.2.1)-ші матрицаның кері матрицасы

$$\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1}Q_{1,h}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi\,,\tilde{v}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_{1,1}(x) & d_{1,2}(x) & d_{1,3}(x) & \dots & d_{1,N}(x) & d_{1,N+1}(x) \\ d_{2,1}(x) & d_{2,2}(x) & d_{2,3}(x) & \cdots & d_{2,N}(x) & d_{2,N+1}(x) \\ d_{3,1}(x) & d_{3,2}(x) & d_{3,3}(x) & \cdots & d_{3,N}(x) & d_{3,N+1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ d_{N+1,1}(x) & d_{N+1,2}(x) & d_{N+1,3}(x) & \cdots & d_{N+1,N}(x) & d_{N+1,N+1}(x) \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

түрінде жазылады. Бұл матрицаның блок элементтерін анықтау үшін алдымен

$$M(x) = B(x) + C(x) \prod_{i=N+1}^{2} p_{i,i-1}(x)$$

матрицасы құрылады. (3.2.6)-шы кері матрицаның блок элементтері төмендегі рекурренттік формулалар көмегімен табылады

$$d_{11}(x) = M^{-1}(x), \quad d_{1,N+1}(x) = M^{-1}(x) \cdot C(x),$$

$$d_{1,j}(x) = d_{1,j+1}(x) \cdot p_{j,j-1}(x), \quad j = \overline{2,N},$$

$$d_{ii}(x) = d_{i-1,i}(x) \cdot p_{i,i-1}(x) - I, \quad i = \overline{2,N+1},$$

$$d_{ij}(x) = d_{i-1,j}(x) \cdot p_{i,i-1}(x), \quad j \neq i, \quad i = \overline{2,N+1}, j = \overline{1,N+1}.$$

Осы формулалардан, [27] еңбегінде анықталғандай, $\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,h}\left(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \tilde{v}\right): R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ матрицасының кері матрицасы бар болуы $(n \times n)$ -өлшемді $M(x)$ матрицасының кері матрицасы бар болуымен пара-пар.

3.3 Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп

$\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ облысында гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u \in R^n, \tag{3.3.1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.3.2}$$

$$g\left(x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in [0, \omega] \tag{3.3.3}$$

мұндағы $f: \bar{\Omega} \times R^{2n} \to R^n$, $g: [0, \omega] \times R^n \times R^n \to R^n$– үзіліссіз функциялар.

Анықтама 3.3.1 $u^*(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ *функциясын (3.3.1)-(3.3.3) есебінің шешімі деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:*

1) *$\bar{\Omega}$ облысында өзінің $\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ және $\frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ дербес туындыларымен бірге (3.3.1)-ші сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады,*
2) *$x = 0$ үшін (3.3.2)-ші шартты қанағаттандырады,*
3) *$x \in [0, \omega]$ үшін $\frac{\partial u^*(x,0)}{\partial x}$ және $\frac{\partial u^*(x,T)}{\partial x}$ (3.3.3)-ші теңдікті қанағаттандырады.*

Жаңа белгісіз $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ функцияның көмегімен (3.3.1)-(3.3.3) есебінен дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін эквивалентті шеттік есепке көшеміз

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\left(x, t, \int_0^x v(\xi, t) d\xi, v\right), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \quad v \in R^n, \tag{3.3.4}$$

$$g(x, v(x,0), v(x,T)) = 0, \quad x \in [0, \omega]. \tag{3.3.5}$$

мұндағы (3.3.2) шарты

$$u(x,t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}. \tag{3.3.6}$$

қатынасында ескерілген, енді $[0, \omega]$ аралығында өзгеретін x шамасын әулет параметрі ретінде қарастырсақ болады.

(3.3.4), (3.3.5) есебі (3.1.1), (3.1.2) есебінің $\psi(t) \equiv 0$ болғандағы дербес жағдайы. Демек, 3.1.1 теореманың шарттары орындалса, (3.3.4), (3.3.5) есебіне сәйкес келетін (3.1.3)-(3.1.6) есебінің кейбір $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho_{\tilde{v}})$ жиынында оқшауланған шешімі бар болады.

$\{\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t])\}$ тізбек мүшелері бойынша $\{v^{(k)}(x,t)\}$ тізбегін құрамыз:

$$v^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & t \in \Omega_r(x), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & t = T, \end{cases} \qquad x \in [0, \omega].$$

(3.3.6) теңдігін пайдаланып $\{u^{(k)}(x,t)\}$ тізбегін аламыз:

$$u^{(k)}(x,t) = \int_0^x v^{(k)}(\xi, t) d\xi, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}.$$

Осылайша, (3.3.1)-(3.3.3) аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің кейбір жиында оқшауланған шешімі бар болуының жеткілікті шарттарын тұжырымдауға болады.

Алдымен, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_{\tilde{v}} > 0$, $\rho_v > 0$, $\rho_u > 0$ сандарын аламыз және 3.1.1 бөлімдегідей $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$, $S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho_{\tilde{v}})$ $S(v^{(0)}(x,t), \rho_v)$, $G_f(x, \rho_u, \rho_v)$, $G_g(x, \rho_\lambda)$ жиындарын және

$$S\big(u^{(0)}(x,t), \rho_v\big) = \Big\{u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, \mathrm{R}^n) \colon \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \big\|u(x,t) - u^{(0)}(x,t)\big\| < \rho_u\Big\}$$

жиынды құрамыз

Теорема 3.3.1 *3.1.1 теореманың шарттары $\psi(t) \equiv 0$ болғанда орындалсын. Онда $\{u^{(k)}(x,t)\}$ тізбегі $S(u^{(0)}(x,t), \rho_u)$ жиынында жатады, осы жиында (3.3.1)-(3.3.3) гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есебінің $u^*(x,t)$ оқшауланған шешіміне жинақталады және келесі бағалау дұрыс болады:*

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \big\|u^*(x,t) - u^{(0)}(x,t)\big\| \le$$

$$\le \omega \cdot \frac{h^2 \cdot \gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} e^{h\gamma_1(h)L_1\omega} \frac{(L_1\omega + L_2)}{\big(1 - h(L_1\omega + L_2)\big)^2} \max_{r=1,N} \widehat{K}_r\,,$$

мұндағы

$$\widehat{K}_r = \max_{x\in[0,\omega]} \sup_{t\in\Omega_r(x)} \left\| f\left(x, t, \int_0^x (u^{(0)}(\xi,t) - u^{(0)}(\xi,(r-1)h))d\xi\,, \frac{\partial u^{(0)}(x,t)}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial u^{(0)}(x,(r-1)h)}{\partial x} \right) \right\|, \qquad r = \overline{1,N}.$$

Мысал 4.

Аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті қарастырамыз. Бұл есептің бастапқы жуықтауын анықтау қажет.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - 1\Big)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{1}{2(x^2-1)}(u_2 - x)\left(\dfrac{2x+1}{x}u_1 - \dfrac{\pi}{4}x\right) + \varphi_1(x,t), \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 1\Big)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{2x+1}{3x(x^2-1)}(u_2 - 1)\left(u_1 - \dfrac{\pi}{4}x\right) + \varphi_2(x,t), \end{cases}$$

$$x \in [1.5,2], \qquad (3.3.7)$$

шарттары

$$\begin{cases} cos\left(4\left.\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} + x - 1\right) \cdot sin\left(\dfrac{5\pi}{2} \cdot \left.\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{t=1}\right) - \dfrac{x-2}{\sqrt{2}} = 0, \\ \left(\left.\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} + x - 1\right)\left(\left.\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{t=1} + x\right) - \dfrac{1}{4}x(\pi + 4x) = 0, \quad x \in [1.5,2] \end{cases} \qquad (3.3.8)$$

$$u_1(1.5,t) = \psi_1(x,t), \quad u_2(1.5,t) = \psi_2(x,t), \quad t \in [0,1], \qquad (3.3.9)$$

мұндағы

$$\varphi_1(x,t) = \frac{\pi}{5}(2x+1)cos2\pi t, \quad \varphi_2(x,t) = \frac{4-\pi}{60}t^2 + \frac{44+\pi}{120}t + \frac{14-5\pi}{60},$$

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{8}(\pi + 3\,sin\,2\,\pi t), \quad \psi_2(x,t) = \frac{1}{20}(2t^2 - t + 30), \quad t \in [0,1].$$

Аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік (3.3.7)-(3.3.9) есебінің бастапқы жуықтауын анықтау қажет. Ол үшін, $v_1(x,t) = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}$, $v_2(x,t) = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}$ жаңа функцияларын енгізу арқылы (3.3.7)-(3.3.9) есебінен (3.1.1)-(3.1.2) есебіне көшеміз, мұндағы

$$f\left(x,t,\psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi\,, v(x,t)\right) = \begin{pmatrix} f_1(x,t,\psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi\,, v(x,t)) \\ f_2(x,t,\psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi\,, v(x,t)) \end{pmatrix},$$

$$(x,t) \in [1.5,2.0] \times [0.0,1.0], \qquad (3.3.10)$$

$$f_1\left(x,t,\psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi\,, v(x,t)\right) = \frac{v_1}{2}(v_2 - 1) -$$

$$-\frac{\psi_2(t) + \int_0^x v_2(\xi,t)d\xi - x}{2(x^2-1)} \cdot \left(\frac{2x+1}{x}(\psi_1(t) + \int_0^x v_1(\xi,t)d\xi) - \frac{\pi x}{4}\right) + \varphi_1(x,t),$$

$$f_2\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x v(\xi,t)d\xi\,,v(x,t)\right)=\frac{v_2}{3}(v_1-1)-\frac{2x+1}{3x(x^2-1)}\times$$

$$\times\left(\psi_2(t)+\int_0^x v_2(\xi,t)d\xi-1\right)\left(\psi_1(t)+\int_0^x v_1(\xi,t)d\xi-\frac{\pi x}{4}\right)+\varphi_2(x,t).$$

$$g(x,v(x,0),v(x,1))=\begin{pmatrix} cos(\,4v_1(x,0)+x-1)\cdot sin\left(\frac{5\pi}{2}\cdot v_2(x,1)\right)-\frac{x-2}{\sqrt{2}} \\ (v_2(x,0)+x-1)(v_1(x,1)+x)-\frac{1}{4}x(\pi+4x) \end{pmatrix},$$

$$x\in[1.5,2.0] \qquad (3.3.11)$$

Сонымен, егер (3.1.11) теңдеуінің шешімін 3.1.1-ші шарттан тапсақ, онда (3.1.1), (3.1.2) есебі (3.3.10), (3.3.11) теңдіктермен берілген f және g функциялары қарастырып отырған (3.3.7)-(3.3.9) есебіне эквивалентті, біз (3.3.7)-(3.3.9) аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің бастапқы жуықтауын анықтай аламыз.

(3.3.11) теңдеуінің шешімін таппас бұрын біз келесі тәсілді ұсынамыз. $\lambda^0(x)=\binom{0.5}{0.5}$ векторын аламыз. Алдымен,

$$Q_{1,1}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^0(\xi)d\xi\,,0\right)=0,$$

$$\lambda(x)=\big(\lambda_1(x),\lambda_2(x)\big)\in C([1.5,2],R^2), \qquad (3.3.12)$$

теңдеуінің шешімін табамыз, яғни

$$Q_{1,1}\left(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda^0(\xi)d\xi\,,0\right)\equiv$$

$$\equiv g\left(x,\begin{pmatrix}\lambda_1(x)\\ \lambda_2 x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_1(x)\\ \lambda_2(x)\end{pmatrix}+f\left(x,t,\psi(t)+\int_0^x\begin{pmatrix}\lambda_1^0(\xi)\\ \lambda_2^0(\xi)\end{pmatrix}d\xi\,,\begin{pmatrix}\lambda_1(x)\\ \lambda_2 x\end{pmatrix}\right)\right)=0$$

сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешеміз. Осы теңдеудің шешімін табу үшін біз Адамар теоремасының күшейтілген локалды нұсқасын, яғни итерациялық процесті қолданамыз: $\lambda^{(0,T,0)}(x) = \lambda^0(x)$,

$$\lambda^{(0,T,m+1)}(x) = \lambda^{(0,T,m)}(x) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{w}_1} Q_{1,1}\left(x, \lambda^{(0,T,m)}(x), \int_0^x \lambda^0(\xi)d\xi, 0\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times Q_{1,1}\left(x, \lambda^{(0,T,m)}(x), \int_0^x \lambda^0(\xi)d\xi, 0\right), \quad m = 0,1,2,\dots, \quad x \in [1.5,2.0]. \quad (3.3.13)$$

Біз 50-ші итерацияда $\lambda^{(0,T)}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0,T)}(x) \\ \lambda_2^{(0,T)}(x) \end{pmatrix}$ векторды таптық. $\lambda_1^{(0,T)}(x), \lambda_2^{(0,T)}(x)$ функциялардың мәндері $x_i = 1.5 + 0.025(i-1)$ $(i = \overline{1,21})$ нүктелерінде 7-ші кестеде келтірілген.

Кесте 7 – $x_i = 1.5 + 0.025(i-1)$ $(i = \overline{1,21})$ нүктелеріндегі $\lambda_1^{(0,T)}(x)$, $\lambda_2^{(0,T)}(x)$ функциялардың мәндері

i	x_i	$\lambda_1^{(0,T)}(x_i)$	$\lambda_2^{(0,T)}(x_i)$	i	x_i	$\lambda_1^{(0,T)}(x_i)$	$\lambda_2^{(0,T)}(x_i)$
1	1.500	0.826	0.980	12	1.775	0.758	0.982
2	1.525	0.848	0.965	13	1.800	0.758	0.980
3	1.550	0.791	0.989	14	1.825	0.759	0.978
4	1.575	0.780	0.991	15	1.850	0.760	0.976
5	1.600	0.773	0.991	16	1.875	0.761	0.974
6	1.625	0.768	0.991	17	1.900	0.763	0.971
7	1.650	0.765	0.990	18	1.925	0.765	0.969
8	1.675	0.762	0.988	19	1.950	0.768	0.966
9	1.700	0.760	0.987	20	1.975	0.772	0.963
10	1.725	0.759	0.985	21	2.000	0.785	0.955
11	1.750	0.758	0.983				

Әрі қарай, [0,1] кесіндісін $N = 10$ бөлікке бөлуге сәйкес келетін (3.1.11) теңдеуін қарастырамыз. Бұл теңдеудің бастапқы жуықтауы ретінде

$$\lambda^0(x) = (\lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x), \dots, \lambda_{11}^0) = \left(\begin{pmatrix} \lambda_{1,1}^0(x) \\ \lambda_{2,1}^0(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{1,2}^0(x) \\ \lambda_{2,2}^0(x) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_{1,11}^0(x) \\ \lambda_{2,11}^0(x) \end{pmatrix}\right)$$

векторын аламыз:

$$\lambda_1^0(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0,T)}(x) \\ \lambda_2^{(0,T)}(x) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_r^0(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0,T)}(x) \\ \lambda_2^{(0,T)}(x) \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^{0.1(r-1)} f\left(x, \tau, \psi(\tau) + \int_0^x \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0,T)}(\xi) \\ \lambda_2^{(0,T)}(\xi) \end{pmatrix} d\xi \,, \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0,T)}(x) \\ \lambda_2^{(0,T)}(x) \end{pmatrix} \right) d\tau, \quad r = \overline{2,11}.$$

$Q_{1,0.1}\left(x, \lambda(x), \int_0^x \lambda^0(\xi)d\xi \,, 0\right) = 0$ теңдеулер жүйесін шеше отырып келесі векторды анықтаймыз

$$\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \dots, \lambda_{11}^{(0)}(x)) \approx$$

$$\approx \left(\begin{pmatrix} v_1^{(0)}(x,0) \\ v_2^{(0)}(x,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1^{(0)}(x,0.1) \\ v_2^{(0)}(x,0.1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1^{(0)}(x,0.2) \\ v_2^{(0)}(x,0.2) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_1^{(0)}(x,1.0) \\ v_2^{(0)}(x,1.0) \end{pmatrix} \right).$$

$u_1(x,t) = \psi_1(t) + \int_0^x v_1(\xi,t)d\xi, \quad u_2(x,t) = \psi_2(t) + \int_0^x v_2(\xi,t)d\xi$ екенін ескере отырып, $(x_i, t_j) = (1.5 + 0.025(i-1), 0.1(j-1))$ $(i = \overline{1,21}, j = \overline{1,11})$ нүктелеріндегі мәндер бойынша $v_1^{(0)}(x,t)$, $v_2^{(0)}(x,t)$ функцияларының сандық интегралдауын қолдана отырып, $u_1^{(0)}(x,t), u_2^{(0)}(x,t)$ функцияларын анықтаймыз.

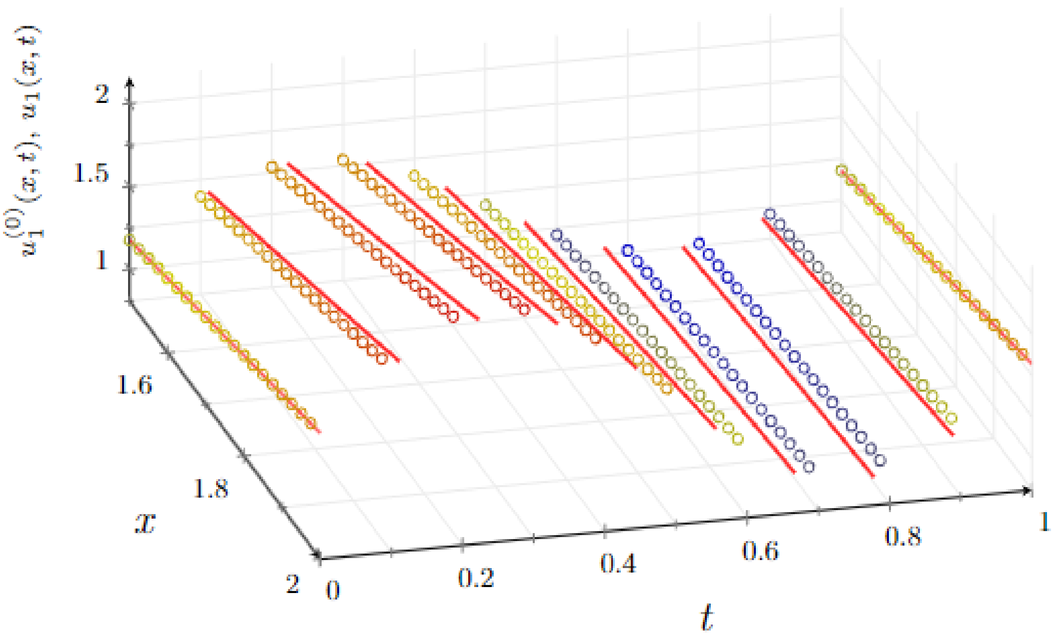
Сондықтан, біз (x_i, t_j) $(x_i = 1.5 + 0.025(i-1),\ t_j = 0.1(j-1),\ i = \overline{1,21},$ $j = \overline{1,11})$ нүктелерінде төмендегі теңсіздікті қанағаттандыратын $u^{(0)}(x,t)$ мәнін анықтадық:

$$\max_{(x,t)=(x_i,t_j)} \left\| u^*(x,t) - u^{(0)}(x,t) \right\| \leq 5.13 \cdot 10^{-3}$$

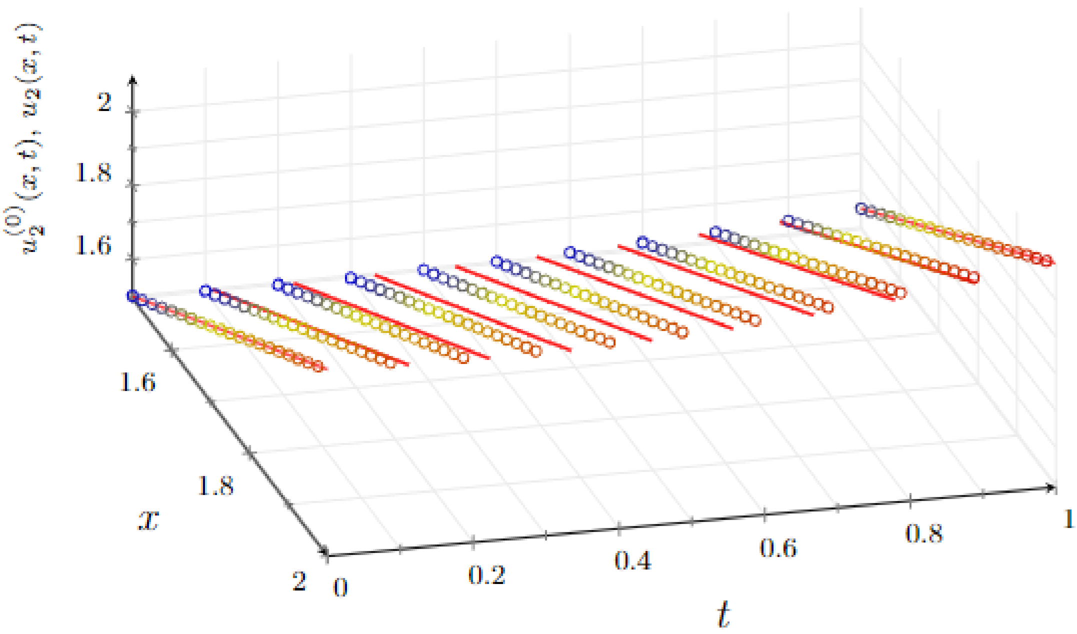
мұндағы $u^*(x,t) = \begin{pmatrix} u_1^*(x,t) \\ u_2^*(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} x(x+1) sin(2\pi t) + \frac{\pi}{4} x \\ \frac{1}{5}(x-1)t(t-\frac{1}{2})x \end{pmatrix}$ дәл шешім.

Осылайша, табылған $u^{(0)}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1^{(0)}(x,t) \\ u_2^{(0)}(x,t) \end{pmatrix}$ функциясын (3.3.7)-ші есепті шешудің бастапқы жуықтауы ретінде алуға болады.

9 және 10 суреттерде $u_1^{(0)}(x,t)$, $u_2^{(0)}(x,t)$, $(x,t) \in [1.5, 2.0] \times [0.0, 1.0]$ функциялардың графиктері келтірілген.



Сурет 9– $u_1^{(0)}(x,t)$) жуық шешім және $u_1(x,t)$ дәл шешім



Сурет 10– $u_2^{(0)}(x,t)$) жуық шешім және $u_2(x,t)$ дәл шешім

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық және сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулеті, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті және аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептерді зерттеу мен шешу әдістері қарастырылған. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықтық емес шеттік есептер әулеті диссертациялық жұмыстың негізгі объектісі болып табылады.

Диссертациялық жұмыста параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмі ұсынылды, яғни шеттік есеп қарастырылатын аралықтың соңғы нүктесінде де қосымша параметр енгізіледі. Бұл- ұсынылған алгоритмнің параметрлеу әдісінің классикалық алгоритмінен айырмашылығы.

Алынған нәтижелер:

- Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешімін табу үшін параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмдері ұсынылып, олардың жинақтылық шарттары алынды. Сонымен бірге бұл шарттар аталған есептердің шешілімділік шарттары болатыны дәлелденді.
- Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің қисынды шешілімді болудың қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалып, дәлелденді.
- Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің «оқшауланған» шешімінің есептің бастапқы деректерінің аз ауытқуларынан үзіліссіз тәуелді болу шарттары алынды.
- Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің аралас туындылы гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті зерттеуге қолданылуы көрсетілді, яғни: шешімін табу алгоритмдерін құру тәсілі көрсетілді, шешімі бар болудың жеткілікті шарттары интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес шеттік есептер әулетінің шешілімділік шарттарының салдары ретінде алынды.
- Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімін табудың параметрлеу әдісінің идеясына сүйеніп өзгертілген алгоритмдері және қойылған есептің сандық шешімін табу тәсілі ұсынылды. Осы алгоритмдер негізінде сызықтық гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің шешімін табу алгоритмі жасалды.
- Сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есептер әулетінің және сызықтық емес гиперболалық теңдеулердің бір класы үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті жуықтап шешу әдістері тестілік есептерде шешімін табу алгоритмдері жүзеге асырылды.

Қарастырылған шеттік есептер үшін сандық әдісінің нәтижелері шешімдердің дәлдігінің жоғары екенін көрсетеді, яғни параметрлеу әдісінің тиімділігін растайды.

Диссертациялық жұмысты орындау барысында алынған нәтижелер теориялық мәнге ие және [121-129] жұмыстарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1 Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. - М.: Мир, 1951. - Т. 2. - 544 с.

2 Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978. - 352 с.

3Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. - 440 с.

4 Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1984. - 208 с.

5 Ладыженская О.Л. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 279 с.

6 Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. - М.: ИЛ, 1961. -220 с.

7 Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных //Известия АН СССР. Сер. матем. – 1937. – №1. –С. 15–50.

8 Cesari L. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR. - Kiev, 1963. - Vol. 2. - P. 440-457.

9 Cesari L. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Arch. Rational Mech. Anal. –1965. – Vol. 20, №2. – P. 170-190.

10 Cesari L. A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Rend.Circ. Mat. Palermo. – 1965. – Vol. 14, №2. – P. 95–118.

11 Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. I //Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, №2. – С. 281–297.

12 Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. II //Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, №4. – С. 637–645.

13 Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type //Mem. Differential Equations Math. Phys. – 1994. – Vol. 1. – P. 1–144.

14 Кигурадзе Т.И. О некоторых нелокальных задачах для линейных гиперболических систем //Доклады РАН. – 1995. – Т. 345, №3. –С. 300-302.

15 Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems //Archivum mathematicum. –1997. – T. 33, №4. – P. 253–272.

16 Kiguradze T. On Bounded in a Strip Solutions of Quasilinear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type //Applicable Analysis. –1995. – Vol. 58, №3–4. – P. 199–214.

17 Aziz A.K. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations//Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 17, №3. – P. 557–566. 231

18 Aziz A.K. and Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial

differential equations in a strip //Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 146. – P. 167–178.

19 Aziz A.K. and Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large //SIAM J. Math. Anal. - 1972. - Vol. 3, №1. - P. 176-182.

20 Lakshmikantham V. and Pandit S.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Comput. and Math. - 1985. - Vol. 11, №1-3. - P. 249-259.

21 Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1992. - 208 с.

22 Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений уравнений нелинейных гиперболических уравнений //Тр. МИАН. - М.: Наука, 1998. - Т. 222. - 191 с.

23 Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x1 de l’equation ux1 ...xn =f(x1, ..., xn, ux1, ..., uxn , ux1x2 , ..., ux1 ...xn) //C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A. - 1973. - Vol. 276. - P. 997-1000.

24 Hecquet G. Contribution a la recherche des solutions periodiques en x1 et x2 de l’equation ux1 ...xn = f(x1, ..., xn, ux1, ..., uxn , ux1x2 , ..., ux1 ...xn) //C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A. - 1973. - Vol. 276. - P. 1047-1050.

25 Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V. ey al. Partial differential equations: time–periodic solutions. – Prague: Martinus Nijhoff Publ, Hague, Boston; London, 1982. - 358 p.

26 Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод //Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, №1. – с. 72–81.

27 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. –Vol. 29, №1. – P. 34–46.

28 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2007. – №47. – P. 37-61.

29 Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, – 2019. –Vol. 22, №1.– P. 0170-4214.

30 Minglibayeva B. B., Assanova A.T. An Existence of an Isolated Solution to Nonlinear Two-Point Boundary Value Problem with Parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics, –2021. –Vol. 42., №3, – P. 587 – 597.

31 Assanova A.T., Imanchiyev A.E. The problem with non-separated multipoint-integral conditions for high-order differential equations and a new general solution // Quaestiones Mathematicae.— 2022. –Vol. 45, – No. 10. — P. 1641–1653.

32 Assanova A.T., Kadirbaeva Zh.M., Bakirova E.A. On the Unique Solvability of a Nonlocal Boundary-Value Problem for Systems of Loaded Hyperbolic Equations with Impulsive Actions // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — №69. — P. 1175–1195.

33 Assanova A.T., Bakirova E.A., Iskakova N.B. Numerical Method for the

Solution of Linear Boundary Value Problems for Integrodifferential Equations Based on Spline Approximations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2020. –Vol. 71, № 9. – P. 1341–1358.

34 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary-Value Problem // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. –Vol. 70, №3. – P. 410–421.

35 Pulkina L.S., Klimova E.N. A nonlocal boundary value problem for a nonlinaer one dimensional ware equation // Matematicheskoe Modelirovanie i Kraevye Zadachi. –2006. №3. –P. 192–195.

36 Asanova A.T., Kadirbayeva Zh.M On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Comp. Appl. Math. –2018. –Vol. 37. –P. 4966–4976.

37 Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter // News of the NAS RK. –2019. – Vol. 325, № 3. –P. 77–84.

38 Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type // News of the NAS RK. –2019. 328 (6) –P. 14–24.

39 Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. –2020. – Vol. 60, № 2. –P. 203–221.

40 Kadirbayeva Z.M. A Numerical Method for Solving Boundary Value Problem for Essentially Loaded Differential Equations // Lobachevskii J Math. –2021. 42, 551–559.

41 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 327. – P. 79-108.

42 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – №43. – P. 1788-1802.

43 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. Vol.42. No 11. P. 1609-1621.

44 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. 2003. Vol.39. No 10. P. 1414 - 1427.

45 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. 2003. Vol. 68. No 1. P. 46-49.

46 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations // Differ. Equ. –2005. –Vol. 41, №3, –P. 352–363.

47 Asanova A.T., On the unique solvability of a family of two-point boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. Journal of Mathematical Sciences. 150 (2008), No 5, 2302--2316.

48 Dzhumabaev D.S., Asanova A.T. The criteria of correct solvability of a linear nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations // Reports NAS of Ukraine. – 2010. No 4. –P. 7-11.

49 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Bounded solutions to systems of hyperbolic equations and their approximation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. Vol. 42. No 8. pp.1132 - 1148.

50 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukrainian Mathematical Journal. 2004. Vol.56. No 4. pp. 682 - 694.

51 Dzhumabaev D.S. On the boundedness of a solution to a system of hyperbolic equations on a strip // Doklady Mathematics. 2004. Vol. 69. No 2. pp. 176-178.

52 Asanova A.T. A Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Quasilinear Hyperbolic Equations. Doklady Mathematics. 74 (2006), No 3, 787--791. [11].

53 Asanova A.T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. (2015), No. 63. pp.1-13.

54 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 402. No 1. pp. 167-178.

55 Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 461. No 1. pp. 817-836.

56 Tomson J. Application of dinamics to physics and chemestry. – London; New-York, 1888. – 324 p.

57 Volterra V. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles. – Paris, 1913. – 164 p.

58 Volterra V. Theorie of functionals and of Integral and integro-differential equations. – London, 1931. – 240 p.

59 Розовский М.И. О некоторых тепловых процессах в твердом теле // ЖЭТФ. 1947. Т. II.

60 Розовский М.И. Интегро-дифференциальные уравнения и проблема учета влияния фактора времени при расчетах механических, электромагнитных и тепловых процессов. — Днепропетровск: Изд. Горн. ин-та. 1952. Т. XXI.

61 Розовский М.И. Об интегро-дифференциальном уравнении распространения электромагнитных волн в среде с диэлектрической и магнитной вязкостью // ДАН СССР. 1946. Т. LIII. N 7.

62 Владимиров В.С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Изв. АН СССР, серия мат., 1957. Т. 21. N 1.

63 Файнберг С.М. Некоторые вопросы теории уран-водной решетки //

Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии, июль 1955, засед. Отд. физмат, наук. 1955.

64 Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. НИЛ, 1953.

65 Фельд Я.Н. Щелевые антенны // ЖТФ. 1947. Т. XVII. Вып. 9.

66 Фельд Я.Н. Законы распределения напряжения вдоль щелей // ДАН СССР. 1947. Т. 55. N. 5.

67 Хаскинд М.Д. Качка корабля на спокойной воде // Изв. АН СССР, сер. техн. наук. 1946. N.1.

68 Огибалов П.М. О распространении вязко-пластического течения с учетом упрочнения для случая вращения и сдвига // ПММ. 1941. Т. V. Вып. I.

69 Bratu M. Sur les equations mixtes lineaires. – Paris: Comptes Rendus, 1909. – 148 p.

70 Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 327 с.

71 Быков Я.В., Танкиев И.А. Об одной обобщенной краевой задаче для счетной системы интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям: сб. ст. – Фрунзе: Илим, 1982. – Вып. 15. – С. 44-62.

72 Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Записки Ленинградского горного института. – Л.; М., 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 161-176.

73 Виграненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Записки Ленинградского горного института. – 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 177-187.

74 Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 100, №5. – С. 849-852.

75 Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. – 1961. – №4(23). – С. 8-24.

76 Васильев В.В., Лобов В.В. О фундаментальных решениях системы линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений // Диф. и интегр. ур-ния: сб. ст. – Иркутск, – 1976. – Вып. 4. – С. 260-269.

77 Николенко В.Н . Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, вып. 5(51). – С. 225-228.

78 Ландо Ю.К. О функции Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра // Уч. зап. Минского пед. ин-та. – 1958. – Вып. 9. – С. 21-27.

79 Ландо Ю.К. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, №4. – С. 695-697.

80 Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Акад. наук Киргиз. ССР. Ин-т физики, математики и механики, 1962. – 184 с.

81 Кривошеин Л.Е. К решению одной задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии: сб. ст. – Фрунзе: Изд-во АН Киргиз. ССР, 1961. – Вып. 1. – С. 177-189.

82 Samoilenko A.M., Boichuk A.A., and Krivosheya S.A. Boundary value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukr. Math. Zh. – 1996. – Vol. 48, №11. – P. 1576-1579.

83 Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ, – 1934. – Вып. 190. – С. 1-25.

84 Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. – 356 с.

85 Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Изд-во Санат, 1997. – 195 с.

86 Касымов К.А. Асимптотика решения задачи с начальным скачком для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной // Изв. Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1968. – №5. – С. 69-72.

87 Дауылбаев М. К., Касымов К. А. О сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнениях с особенностями // Изв. АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. – 1990. – №5. – С. 18-23.

88 Дауылбаев М.К., Касымов К.А. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, №6. – С. 822-830.

89 Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Изд-во Казак университетi, 1999. – 170 с.

90 Dauylbaev, M.K., Mirzakulova, A.E. Boundary-Value Problems with Initial Jumps for Singularly Perturbed Integro-differential Equations // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2017, 222(3), p 214–225.

91 Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro Differential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010 – Vol. 50, №7. – P. 1150–1161.

92 Dzhumabaev D.S. An Algorithm for Solving a Linear Two Point Boundary Value Problem for an Integrodifferential Equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 53, №6. – P. 736–758.

93 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Well-Posedness of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2010. – Vol. 46, №4. – P. 553-567.

94 Dzhumabaev D.S. and Bakirova E.A. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, №9. – P. 1-16.

95 Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Известия НАН РК.

Сер.физ.-матем. - 2004.№1.С. 85-90.

96 Усманов К.И. Критерий однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями // Математический журнал. – 2009. – Т. 5, №4. – С. 34-43.

97 Bakirova E.A., Iskakova N.B., Asanova A.T. Numerical method for the solution of linear boundary-value problems for integro-differential equations based on spline approximations // Ukrainian Mathematical Journal. -2020. - Vol. 71, № 9. - P. 1341-1358.

98 Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations / / Computational and Applied Mathematics. - 2020. - Vol. 39. № 248.

99 Stanzhitskii A.N., Karakenova S.G., Uteshova R.E. Averaging Method and Boundary Value Problems for Systems of Fredholm Integro-Differential Equations // Nonlinear Dynamics And Systems Theory. – 2021.- Vol.20. – No. 1. - P. 100-113.

100 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1. – С. 96-105.

101 Нахушев А. М. Уравнения мат. биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 205 с.

102 Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы, 1995. – 269 с.

103 Дженалиев М.Т. Краевые задачи и задачи ограничения управления для линейных нагруженных типов гиперболического типа // Дифференциал. Уравнения. –1992. – Т. 28, №2. – С. 232–241.

104 Dzhumabaev D.S. Convergence of iterative methods for unbounded operator equations // Mat. Zametki. – 1987. – Vol. 41, №5. – P. 356-361.

105 Dzhumabaev D.S. On the convergence of a modification of the Newton-Kantorovich method for closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 95-99.

106 Dzhumabaev D.S. On the solvability of nonlinear closed operator equations // Amer. Math. Soc. Transl. – 1989. – Ser. 2, №142. – P. 91-94.

107 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Non-local boundary value problem for nonlinear system of hyperbolic equations. Proceed. X-International conf. on "Hyperbolic problems: Theory, Numerics and Application" Osaka. - Japan, 2004, September 13-17, –P. 52-54.

108 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. On a practicability and convergence of the algorithm of parametrization's method // Bulletin of the Karaganda University-mathematics. – 2010. – Vol. 60, № 4. –P. 53-62.

109 Lakshmikantham V., Rao M.R.M. Theory of Integro-Differential Equations. – London: Gordon and Breach, 1995. – 375 p.

110 Ortega J.M., Rheintboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – Philadephia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

– 599 p.

111 Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations.1st ed. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2004. –803 c.

112 Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. Methods for the Solution of Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics –Fizmatlit, Moscow, 2005. – 256 c.

113 Wazwaz A.M. A comparison study between the modified decomposition method and the traditional methods for solving nonlinear integral equations // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 181, №2. – P. 1703-1712.

114 Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука., 1976. – 152 с.

115 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 249 с.

116 Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. 534 с.

117 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary Value Problem // Ukrainian Mathematical Journal – 2018. – Vol. 70, № 3. –P. 410-421

118 Temesheva S.M. A modification of algorithms of the Dzhumabaev parameterization method and a numerical method // International journal of information and communication technologies –2020. –Vol. 1, № 2. –P. 66-73.

119 Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Об одном алгоритме нахождения решения нелинейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., мех., инф. – 2010. – Vol.66, №3. – С. 196-200.

120 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorith to find a solution to a linear two-point boundary value problem // Lobachevskii journal of mathematics. – 2021. – 42. – №3. – P. 606–612.

121 Temesheva S.M., Abdimanapova P.B. On a Solution of a Nonlinear Nonlocal Boundary Value Problem for one Class of Hyperbolic Equation // Lobachevskii journal of mathematics–Kazan Federal University. –2023, –Vol.44, №7. –P.2529–2542.

122 Abdimanapova P.B., Temesheva S.M. Well-posedness criteria for one family of boundary value problems // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. –2023. –Vol. 112, № 4. –P. 5–20.

123 Темешева С.М., Абдиманапова П.Б., Борисов Д.И. Об одном методе решения семейства нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник КазНПУ имени Абая, «Физико-математические науки»–2021, –№1(73), -Р.70-76.

124 Абдиманапова П.Б., Темешева С.М., Жумагазыкызы А. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетінің қолданылуы туралы // КазНПУ им.Абая, Серия «Физико-математические науки», –2022, –№3(79), -Р.7-13.

125 Темешева С.М., Абдиманапова П.Б. О выборе начального приближения нелинейной нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь

Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы. 2022. Тезисы докладов. 5-7 апреля 2022г., стр.107-108.

126 Абдиманапова П.Б., Темешева С.М. Начальное приближение решения нелинейной нелокальной краевой задачи для одного класса систем гиперболических уравнений // IX халықаралық ғылыми конференция «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары», Ақтөбе, 24-28 мамыр 2022 ж., 101-103 б.

127 Темешева С.М., Абдиманапова П.Б., Жумагазыкызы А. О применении семейства краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений // Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина, Караганда, 8–9 сентября, 2022 г., стр. 146-147.

128 Temesheva S.M., Abdimanapova P.B., Iskakova N.B. On the solvability of the nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations // The international Conference: «Dynamical Systems, Modeling, and Mathematical Sciences», Dubai, September 23-25, 2022, pp. 58.

129 Абдиманапова П.Б. О критериях разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы. 2023. Тезисы докладов. 5-7 апреля 2023г., стр.60.