Дәріс 7. Кошидің интегралдық формуласы. Голоморфты функцияның дәрежелік қатарға жіктелуі

1 Кошидің интегралдық формуласы

Коши теоремасы әр ғылымның әртүрлі саласында қолданылатын мықты аппарат. Коши теоремасында

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$$

интегралының теңдігі туралы айтылады. Сондықтан өз қалауың бойынша оң немесе сол жағындағы интегралды есептеу керек. Әдетте оңай табылатын жағын есептейді. $\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a}dz$ интегралын есептеу үшін айтылған талқылауды орындаймыз. $g(z)$ барлық комплекс жазықтықта голоморфты функция, ал γ-туынды қисық сызықты контур болсын.

Егер $a \in \operatorname{ext}\gamma$ нүктесі үшін $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ интеграл астындағы функция кейбір ε-маңайында $\operatorname{int}\gamma$ үшін голоморфты функция болады. Онда 7-ші теоремасы бойынша

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a}dz = 0.$$

Егер $a \in \operatorname{int}\gamma$, нүктесі үшін $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ интеграл астындағы функция a нүктесінің ойынған маңайында голоморфты функция болады. Центрі a нүктесінде жататын әр шеңбер γ қисығына голоморфты, a нүктесін қозғамай γ қисығын осы шеңберге деформациялаймыз.

6-теорема бойынша

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a}dz = \oint_{|z-a|=\delta} \frac{g(z)}{z-a}dz.$$

Соңғы теңдіктің сол жағы δ тәуелсіз болғандықтан, онда шектердің қатынасын келесі түрде жазуға болады:

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a}dz = \lim_{\delta\to 0} \oint_{|z-a|=\delta} \frac{g(z)}{z-a}dz.$$

Сөйтіп соңғы теңдіктің оң жағын табу керек:

$$\lim_{\delta\to 0} \oint_{|z-a|=\delta} \frac{g(z)}{z-a}dz = \left| \begin{array}{c} z-a=\delta e^{i\varphi} \\ 0<\varphi<2\pi \end{array} \right| = \lim_{\delta\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{g\left(a+\delta e^{i\varphi}\right)}{\delta e^{i\varphi}} \delta e^{i\varphi} i d\varphi = 2\pi i \cdot g(a)$$

Демек $\forall a \in \operatorname{int}\gamma$ арқылы

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz = 2\pi i g(a)$$

Кошидің интегралдық формуласы деп аталатын формуланы аламыз. Берілген формуланы a бойынша екі жағында диференциялдасақ, онда

$$2\pi i g'(a) = \mathrm{f}_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^2}dz$$

туындысын анықтаймыз. Диференциялдауды жалғастыруға болады.

Кошидің интегралдық формуласын талқылау.

- $g(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz$ осыдан $\forall a \in \operatorname{int}\gamma$ үшін голоморфты $g(z)$ функцияның $g(a)$ ішкі мәндерін γ шекарасындағы мәндері арқылы табуға болады. Шекаралық мәндер арқыл функцияны құру сияқты мәселелер шекаралық есептер теориясында қарастырылады.

- Рационал функциялар қарапайым бөлшектердің қосындысы ретінде кездесетінін еске түсірейік. Мысалы,

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s), \quad x_j \neq x_k, \quad j \neq k$$

болғанда, онда келесі жіктелуі дұрыс:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_s}{(x-x_s)}.$$

- Кошидің интегралдық формуласын a параметрі бойынша шексіз рет диференциялдауға болғандықтан, голоморфты функцияны шексіз рет диференциялдауға болады. Математиколық анализ курсында фшнкцияның тек ақырлы сан рет диференциялдауы кездескен. Бұл жерде ондай жоқ.

- Кошидің интегралдық формуласы интегралды есептеудің орнына голоморфты функцияның мәнін немесе оның туындысын табуға рұқсат етеді. Шынында да,

$$\oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = \frac{2\pi i}{k!}g^{(k)}(a)$$

Емтиханға сұрақ: Голоморфты функцияның дәрежелік қатарға жіктелуі.

Кошидің интегралдық формуласынан $g(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz$,голоморфты функцияның мәнін $\frac{A}{z-a}$ түріндегі қарапайым түбірлерден құрауға болады, мұндағы $A = \frac{g(z)}{2\pi i}$.Екінші жағынан түбір $\frac{A}{z-a}$ $a \neq z$ болғанда дәрежелік қатарға жіктеледі. Сондықтан голоморфты функциялардың дәрежелік қатарға жіктелетіні түсінікті. Бұл тұжырымды қатаң математикалық түрде анықтайық.

Теорема 9.

$$f(z) \in H(D), \forall z_0 \in D \Rightarrow \exists B\left(z_0, \delta\right) \equiv \{z : |z - z_0| < \delta\} \subset D :$$

$$\forall z \in B\left(z_0, \delta\right) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z$$

Жаттығу. 9-шы теореманы ашып жазыңыз.

Ескерту. 9-шы теоремадағы жіктелу кейбір $B\left(z_0, \delta\right)$ дөңгелектерінде пайда болады. Яғни жіктелу шектелген, δ радиуысын бағалай алмайтынымыздай.

Жаттығу. 9-теореманың дәлелдеуін талдап, ең үлкен δ радиуысын табыңыз.

9-теореманың дәлелдеуі.

1 қадам. $\dfrac{A}{t-a}$ түріндегі бөлшектің жіктелуі:

$$\frac{A}{t-z} = \frac{A}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \left| \text{ егер } \quad |t-z_0| > |z-z_0| \right| =$$

$$= \frac{A}{t-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} = \frac{A}{t-z_0}\left\{1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \cdots\right\} =$$

$$= \frac{A}{t-z_0} + \frac{A\left(z-z_0\right)}{\left(t-z_0\right)^2} + \frac{A\left(z-z_0\right)^2}{\left(t-z_0\right)^3} + \cdots$$

2-қадам. Голоморфты функцияның бекітілген нүктенің маңайында Тейлор қатарына жіктелуі. z_0 – D облысында бекітілген нүкте болсын. Центірі z_0 болатындай етіп B_0 дөңгелегін сызамыз, және $B_0 \subset D$.

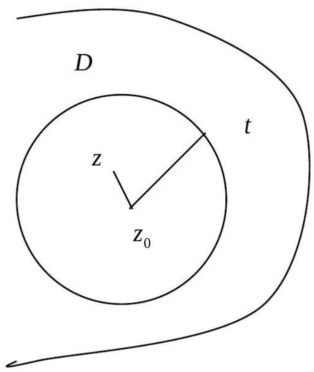
Кошидің интегралдық формуласы бойынша B_0 дөңгелегінде $f(z)$ функциясының мәнін есептейміз:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathbf{B}_0} \frac{f(t)}{t-z}dt.$$

Енді бірінші қадамның нәтижесін пайдаланамыз.

$$\frac{f(t)}{t-z}=\frac{f(t)}{t-z_0}+\frac{f(t)\,(z-z_0)}{(t-z_0)^2}+\frac{f(t)\,(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3}+\cdots$$

орындалады егер, $|z-z_0|<|t-z_0|$ орындалса.



Сурет 1: B_0 дөңгелегі

Соңғы екі теңсіздікті де Коши интегралдық формуласымен есептейміз.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\left(\frac{f(t)}{t-z_0}+\frac{f(t)\,(z-z_0)}{(t-z_0)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{f(t)\,(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3}+\cdots\right)dt.$$

Осыдан $f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$ шығады, мұндағы коэффициенттер

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_0}\left(\frac{f(t)}{t-z_0}\right)dt,\quad c_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\left(\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\right)dt,$$
$$c_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\left(\frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\right)dt,\ldots$$

Теорема 9 дәлелденді.

Теорема 10. *9-шы теоремада көрсетілгендей жіктелу жалғыз.*

Дәлелдеуі. B_0 шеңберінде $f(z)$ функциясы келесі қатарға жіктелсін:

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

және

$$f(z)=d_0+d_1(z-z_0)+d_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

Кез келген n үшін $c_n=d_n$ екенін көрсету керек. $f(z_0)=c_0=d_0$ мысалдан көрінеді. Осылайша $f'(z_0)=c_1=d_1$ аламыз. Индукция әдісі бойынша 10 теорема дәлелденді.

Тұжырым 1. *9-шы, 10-шы теоремалардан голоморфты функция голоморфты облыста шексіз диференциялданады.*

Бұл осы қасиет қатардың дәрежелік Тейлор қатарына жіктелуі.

Тұжырым 2. *9-шы, 10-шы теоремалардан туындатылған голоморфты функциялар келесі түрде болады*

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\frac{f(t)}{t-z_0}dt,$$

$$f'\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\frac{f(t)}{\left(t-z_0\right)^2}dt,$$

$$f''\left(z_0\right)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_{\partial B_0}\frac{f(t)}{\left(t-z_0\right)^3}dt,\ldots$$

Тұжырым 3. *9-шы, 10-шы теоремалардан* z_0 *– голоморфты* $f(z)$*-тің* m_0*-ретті нолі, онда Безу шарты бойынша* $f(z)=\left(z-z_0\right)^{m_0}h(z)$*, мұндағы* $h(z)$ *– голоморфты функция және* $h\left(z_0\right)\neq 0$ *шарты орындалады.*

Дәлелдеу. $f\left(z_0\right)=0, f'\left(z_0\right)=0,\cdots,f^{(m_0-1)}\left(z_0\right)=0, f^{(m_0)}\left(z_0\right)\neq 0$, болғанда $f(z)$ функциясының z_0 маңайында Тейлор қатарына жіктелуі

$$f(z)=f^{(m_0)}\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)^{m_0}+f^{(m_0+1)}\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)^{m_0+1}+\ldots$$

болады. Осыдан көрінгендей $h(z)=f^{(m_0)}\left(z_0\right)+f^{(m_0+1)}\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)+\cdots$. Тұжырым дәлелденді.