

ЛЕКЦИЯ-12

§6.4. Ядросы симметриялық емес I-текті интегралдық теңдеулер

Симметриялық емес $H(x, s) \in L_2[a, b]$ ядросы

$$H(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s)$$

бисызықты қатарына жіктелсін. Онда $\int_a^b H(x, s) \varphi(s) ds = 0$ интегралдық

теңдеуінің шешімдері барлық $\varphi_k(x)$ функцияларына ортогональ функциялар болады. Міне, бұдан Шмидт ядросы тұйық болса, теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болатыны және егер ядро тұйық болмаса, онда ол теңдеудің ақырлы немесе санақты жиынды, сызықты тәуелсіз нөлге тең емес шешімдері бар болатыны шығады.

Теорема. Біртекті емес

$$\int_a^b H(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (104)$$

теңдеуінің $L_2[a, b]$ класында шешілуі үшін бұл теңдеудегі бос мүше $f(x)$ Шмидттің $K_1(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $\varphi_k(x)$ арқылы

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \quad (105)$$

орташа жинақты қатарына жіктелуі және

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \quad (106)$$

қатарының жинақты болуы қажетті де, жеткілікті. Осы шарттар орындалған кезде (104) теңдеуінің шешімі

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \psi_k(x)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы, $\varphi_0(x)$ – жоғардағы (103) теңдеуінің кез келген шешімі.

Дәлелдеуі. Егер (104) теңдеуінің шешімі $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ болса, онда $f(x) \in L_2[a, b]$. Сондықтан Шмидт теоремасы бойынша $f(x) \in L_2[a, b]$ функциясы (105) қатарына жіктеледі. Бессель теңсіздігі бойынша (106) қатары жинақты болады және керісінше, егер (106) қатары жинақты болса, онда Рисс-Фишер теоремасы бойынша $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ функциясы табылып және $\lambda_k f_k$ Фурье коэффициенттері болады, яғни

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \psi_k(x)$$

теңдігі орынды. Бұл теңдікпен анықталған $\varphi(x)$ функциясы (104) теңдеуін қанағаттандыратынын оңай тексеріп көруге болады.

§6.5. Фредгольмнің 1-текті қисынсыз интегралдық теңдеуі

1. Қисынсыз қойылған есеп туралы ұғым. $A\varphi = f$ теңдеуінің A және f белгілі болған жағдайдағы φ шешуін табу есебін қарастырайық. Есепті қисынды немесе қисынсыз қою жағдайларын да қарастырайық. Бірінші рет бұл ұғымдарды Жак Адамар енгізді.

φ мен f функцияларды метрикалық Φ және F кеңістіктерінің элементтері болып, оларда сәйкес $\rho_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2)$ және $\rho_F(f_1, f_2)$ түріндегі метрикаларды анықталсын. Әдетте, метрика ұғымы есептің қойылуына байланысты анықталады.

$\varphi = R(f)$ түрінде теңдеудің шешімі ұғымы анықталсын.

Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\rho_F(f_1, f_2) < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігінен $\rho_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varepsilon$ болса, онда φ орнықты шешім делінеді, мұндағы, $f_1, f_2 \in F$, ал $\varphi_1(x) = R_1(f_1) \in \Phi$, $\varphi_2(x) = R(f_2) \in \Phi$.

Егер (Φ, F) қос метрикалық кеңістікте: 1) $\forall f \in F$ үшін оның шешімі $\varphi \in \Phi$ бар болса; 2) шешім жалғыз, бірімәнді анықталса; 3) шешім үшін орнықтылық шарттары орындалса, онда $A\varphi = f$ есебі қисынды қойылған есеп деп аталады. Бұл шарттардың кемінде біреуін қанағаттандырмайтын есептер қисынсыз есептер деп аталады. Бұл қисынсыз қойылған есеп ұғым тек (F, Φ) қос метрикалық кеңістік үшін орынды, себебі басқа кеңістікте бұл есеп қисынды қойылған болуы мүмкін.

Мысал үшін $[a, b]$ кесіндісінде берілген $f(x)$ функциясының туындысы болатын $\varphi(x)$ функциясын анықтау мәселесін алуға болады:

$$\varphi = \frac{df}{dx}.$$

$f_1(x)$ функциясының туындысы $\varphi_2(x)$ болсын. $f_2(x) = f_1(x) + N \sin \omega x$ функциясы C метрикасында $f_1(x)$ функциясынан $\rho_c(f_1, f_2) = |N|$ шамамен айырмашылықта болады, мұндағы, ω кез келген аз шама. Бірақ $\varphi_2(x) = \frac{df_2}{dx}$ туындысы C метрикасы бойынша $\varphi_1(x)$ -тен $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = |N\omega|$ айырмашылықта болады және ол айырманы $|\omega|$ параметрінің жеткілікті мөлшердегі үлкен мәні үшін үлкен етуге болады.

Демек, шешімнің орнықтылық шарттары орындалмай жатыр.

Егер $f_1(x)$ мен $f_2(x)$ функциясының арақашықтығы C^1 метрикасымен, яғни $\rho_{c'}(f_1, f_2) = \max \left\{ \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \sup_{[a,b]} |f_1'(x) - f_2'(x)| \right\}$ немесе

$$\rho_c(f_1, f_2) = \sup_{x \in [a,b]} \left\{ |f_1(x) - f_2(x)| + |f_1'(x) - f_2'(x)| \right\}$$

формуласымен, ал $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ функциясының арақашықтығы C метрикасымен берілсе, онда бұл қашықтықтар өзара $\rho_c(\varphi_1, \varphi_2) \leq \rho_{c'}(f_1, f_2)$ қатынасында болады, мұндағы, $\varphi_1(x) = \frac{df_1}{dx}$, $\varphi_2(x) = \frac{df_2}{dx}$, демек, $f \in C^1$ функциясының аз өзгеруі $\varphi \in C$ функциясын аз өзгертеді, яғни қарастырылып жатқан есеп орнықты.

Енді Фредгольмнің 2-текті

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (107)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұның ядросы $K(x, s)$ үзіліссіз функция, ал λ ол ядроның меншікті мәні болмасын. Онда (107) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі болады, ол:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds$$

түрінде жазылады. Мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ - үзіліссіз функция. Міне, осы тұжырымдардан бұл теңдеуді шешу есебі орнықты, яғни $f(x)$ - функциясының аз өзгеруіне $\varphi(x)$ функциясының да аз өзгеруі сәйкес келеді. Сонымен (107) есебі қисынды қойылған.

2. Фредгольмнің 1-текті теңдеуі қисынсыз есеп. Бірінші текті Фредгольм теңдеуін

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (108)$$

қарастырайық. Мұндағы, $K(x, s)$ ядросы үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. (108) теңдеуі шешімінің орнықтылық мәселесімен шұғылданайық.

Жаңа $\psi(x) = \varphi(x) + \cos \omega x$ функциясын енгізейік, мұнда ω параметр. Бұл функцияны (108) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ пен ауыстырсақ,

$$\int_a^b K(x, s)[\psi(s) - \cos \omega s]ds = f(x).$$

Бұдан

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + \int_a^b K(x, s)\cos \omega s ds \equiv f(x) + g(x)$$

немесе

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + K(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} ds$$

Әрине, $\sup|f(x) - g(x)| < \frac{C}{\varepsilon}$ мұнда, $C - \omega$ -ға байланыссыз тұрақты шама.

Сондықтан ω жеткілікті дәрежеде үлкен болса, $\rho_c(f, g) = \sup_{[a, b]}|f(x) - g(x)|$ өте аз шама болады. Екінші жағынан, $\rho_c(\varphi, \psi) = \sup|\cos \omega x| = 1$, яғни бұл шама өте аз емес, міне, осы екі нәтиже (108) интегралдық теңдеуінің қисынсыздығын көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

2. Фредгольмнің 1-текті теңдеуі қисынсыз есеп. Бірінші текті Фредгольм теңдеуін

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (108)$$

қарастырайық. Мұндағы $K(x, s)$ ядросы үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. (108) теңдеуі шешімінің орнықтылық мәселесімен шұғылданаық.

Жаңа $\psi(x) = \varphi(x) + \cos \omega x$ функциясын енгізейік, мұнда ω параметр. Бұл функцияны (108) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ пен ауыстырсак,

$$\int_a^b K(x, s)[\psi(s) - \cos \omega s]ds = f(x).$$

Бұдан

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + \int_a^b K(x, s)\cos \omega s \equiv f(x) + g(x)$$

немесе

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + K(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} ds.$$

Әрине, $\sup|f(x) - g(x)| < \frac{C}{\omega}$ мұнда $C - \omega$ - ға байланыссыз тұрақты шама.

Сондықтан ω жеткілікті дәрежеде үлкен болса, $\rho_c(f, g) = \sup_{[a, b]}|f(x) - g(x)|$ өте аз шама болады. Екінші жағынан $\rho_c(\varphi, \psi) = \sup|\cos \omega x| = 1$, яғни бұл шама өте аз емес, міне осы екі нәтиже (108) интегралдық теңдеуінің қисынсыздығын көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың экстремальдық қасиеттері. Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша, кез келген $h(x) \in L_2[a, b]$ үшін

$$Kh \equiv \int_a^b K(x, s)h(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

теңдігі орынды, мұндағы, $K(x, s) \in L_2(a, b)$ ал λ_n -дер оның меншікті мәндері. Бұл теңдіктің оң жағында тұрған қатар орташа жинақты болғандықтан, оны $h(x)$ -ке скаляр көбейтуге болады, яғни

$$(Kh, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n, h \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} (\varphi_n, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)^2}{\lambda_n}.$$

$K(x, s)$ ядросының меншікті мәндері λ_n сандары абсолют шамаларының өсу ретімен орналассын, яғни $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ болсын, ал λ_1 абсолют шамасы бойынша ең кішісі дейік. Онда соңғы теңдіктен

$$(Kh, h) \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2.$$

Егер бұл теңсіздікке Бессель теңсіздігін

$$\sum_{n=1}^{\infty} (h, \varphi_n)^2 \leq \int_a^b h^2(x) dx = \|h\|^2$$

пайдалансақ, онда

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|h\|^2, \|h\| = 1$$

қатысы шығады.

Ал $h(x)$ функциясы бірінші меншікті функция $\varphi_1(x)$ -ке тең болса, онда осы теңсіздік тепе-теңдікке айналады. Расында, $h(x) = \varphi_1(x)$ болса, онда $\varphi_1(x) = \lambda K \varphi_1$ тепе-теңдігінен

$$(K \varphi_1, \varphi_1) = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}$$

өрнегін аламыз. Сонымен мынадай тұжырымды дәлелдедік.

Теорема. Нормаланған функциялар жиынында (Kh, h) скаляр шамасы өзінің ең жоғарғы шамасына ие, ол $\frac{1}{|\lambda_1|}$ -ге тең ал максимум мәніне $h(x) = \varphi_1(x)$ болғанда жетеді.

Енді $K(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ ортогонал болатын нормаланған функциялар жиынын қарастырайық, яғни $\|h(x)\| = 1, (h, \varphi_1) = (h, \varphi_2) = \dots = (h, \varphi_{m-1}) = 0$ болсын. Онда берілген теңдіктен

$$Kh = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдігін аламыз. Бұл өрнекке жоғарыдағы түрлендірулерді қайталасақ,

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|}, \quad (K\varphi_m, \varphi_m) = \frac{\|\varphi_m\|^2}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_m}, \quad h = \varphi_m(x)$$

қатынасын аламыз. Сондықтан мына теорема орынды.

Теорема. Нормаланған функциялар жиынында ортогонал $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ функциялар жиыны үшін (Kh, h) шамасы өзінің ең үлкен мәніне ие болады, ол $\frac{1}{|\lambda_m|}$ -ге тең, ал $h(x) = \varphi_m(x)$ болғанда максимум мәніне жетеді.

Ескерту. Симметриялық интегралдық теңдеулердің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын вариациялық әдістерді пайдаланып табу, әдетте, осы теоремаларға негізделген.