

Тақ және нақты айнымалы функциялары — есептер

I. Тақ және жұп функциялар

1. Берілген функция:

$$f(x) = x^3 - 2x$$

а) Функцияның тақ немесе жұп екенін анықтаңдар.

б) $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ мәндерін табыңдар.

2. Функция:

$$f(x) = x^4 + 3x^2$$

а) Функция тақ па, жұп па, әлде екеуіне де жатпай ма?

б) $f(-x)$ формуласын жазыңдар.

3. Қандай a мәндерінде

$$f(x) = ax^2 + 2x + 1$$

функциясы жұп немесе тақ болады?

4. Төмендегі функциялардың тақ, жұп немесе екеуіне де жатпайтынын анықтаңыз:

1. $f(x) = \sin x$

2. $f(x) = \cos x$

3. $f(x) = e^x$

4. $f(x) = |x|$

5. Егер $f(x)$ — тақ функция болса, және

$$f(3) = -2$$

болғанда, $f(-3)$ -тің мәнін табыңдар.

II. Нақты айнымалы функциялар

6. Берілген функция:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

а) Функцияның анықталу облысын табыңдар.

б) $f(x)$ -ті ықшамдап, үзіліс нүктесін анықтаңдар.

7. Функция:

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

а) Анықталу облысын табыңдар.

б) Графигін сипаттаңдар (қай бағытта өседі, қай нүктеден басталады).

8. Функцияның мәндер жиынын табыңдар:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

9. Берілген:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

а) Төменгі нүктесін (минимумын) табыңдар.

б) $f(x) = 0$ теңдеуін шешіңдер.

10. Функция:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

а) Функция үздіксіз бе?

б) Графигін салыңдар (қысқаша нұсқа).

Комплекс айнымалы функциялар — тақтылық және жұптылық есептері

Төмендегі есептер комплекс айнымалы $z \in \mathbb{C}$ үшін анықталатын функциялардың жұптық (even) және тақтық (odd) қасиеттерін зерттеуге арналған.

1. Функцияны тексеріңдер: $f(z) = z^3 + \bar{z}$.

2. Функция: $f(z) = z^2 + 1$.

а) Егер z нақты болса, бұл функция жұп па?

б) Жалпы комплекс z үшін $f(-z) = f(z)$ тең бе?

3. Функцияны тексеріңдер: $f(z) = \Re(z)$, мұндағы $\Re(z)$ — комплекс санының нақты бөлігі.

4. Функция: $f(z) = \Im(z^2)$ (мұндағы $\Im$ — комплекс санының жорамал бөлігі). Бұл функция тақ па, жұп па, әлде екеуіне де жатпай ма?

5. Функцияны тексеріңдер: $f(z) = |z|^2$.

6. Жалпы түрде қарастыру: $f(z) = az^2 + b\bar{z} + c$, мұндағы $a, b, c \in \mathbb{C}$.

а) Қандай шарттар орындалса f жұп болады ($f(-z) = f(z)$)?

б) Қандай шарттар орындалса f — тақ болады ($f(-z) = -f(z)$)?

7. Функция: $f(z) = e^z + e^{-\bar{z}}$. Бұл функцияның $f(-z)$ және $f(\bar{z})$ қатынастары арқылы тақ/жұп қасиетін талдап шығыңдар.

8. Функция: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ (қызмет көрсету $z \neq 0$ үшін). Бұл функция жұп па, тақ па, әлде екеуіне де жатпай ма? Неге?

9. Функцияны тексеріңдер: $f(z) = z\bar{z}^2 = z(\bar{z})^2$.

10. Қиындығы жоғары: Егер f барлық $z \in \mathbb{C}$ үшін аналитикалық (holomorphic) функция болып, f жұп болса, онда f оның Тейлор қатары тек жұп степендерден тұруы керек екенін дәлелдеңіз. Ұсыныс: аналитикалық функцияның Тейлор қатары бар болса, $f(-z) = f(z)$ шарты коэффициенттердің жұп степендерден ғана тұруын талап етеді.
