Мысал 12. $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin\left(x^q\right) dx, \qquad (q \neq 0)$ интегралын абсолютті және шартты жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. p-ң, q-ң таңбасы анықталмағандықтан берілген интегралдың ерекше нүктелері $x = 0, \quad x = +\infty$. $x^q = t$ алмастыруын жасап, интегралды екі қосылғышқа жіктейік: :

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin\left(x^q\right) dx = \left| \begin{array}{l} x^q = t \\ dx = \dfrac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt \end{array} \right| = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt, & q > 0 \\ \dfrac{1}{q} \int\limits_{+\infty}^{0} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt, & q < 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{|q|} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt = \frac{1}{|q|} \left(\int\limits_0^{\pi} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt + \int\limits_{\pi}^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt \right)$$

Теңдіктің оң жағындағы бірінші интегралды зерттейік.

$$\int\limits_0^{\pi} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt$$

- 2-текті меншіксіз интеграл, ерекше нүктесі $t = 0$.

Интегралды ерекше нүктенің маңайында қарастырамыз.

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt \underset{t \to 0}{\sim} \int\limits_0^{\pi} \frac{t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{t^{-\frac{p+1}{q}}} dt$$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{t^{-\frac{p+1}{q}}} dt$ интегралы $\frac{p+1}{q} > -1$ болса жинақты, $\frac{p+1}{q} \leq -1$ болса жинақталмайды. (7-мысал)

$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt$ интегралының жинақтылығын Дирихле белгісімен зерттейміз.

Мұнда $f(t)=\sin t, \qquad g(t)=\dfrac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$ деп алайық. Сонда $\forall t \geq \pi$ үшін

1) $|F(t)|=|-\cos t| \leq 2$, алғашқы функция шектелген;

2) $g(t)=\dfrac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$, $\forall t \geq \pi$ үшін монотонды кемімелі, егер $1-\dfrac{p+1}{q} \,\square\, 0 \Rightarrow \dfrac{p+1}{q} \,\square\, 1$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$, болады, егер $1-\dfrac{p+1}{q} \,\square\, 0 \Rightarrow \dfrac{p+1}{q} \,\square\, 1$.

Дирихле белгісінің шарттары тек жеткілікті болғандықтан, $\dfrac{p+1}{q} \geq 1$ болса

$\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ интегралының жинақсыз екенін көрсетейік. Ол үшін қатар қарастырамыз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt$$

қатарын жоғарыдан бағаласақ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((2n-1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos 2n\pi - \cos(2n-1)\pi)}{((2n-1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(2n+1)\pi - \cos 2n\pi)}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((2n-1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}$$

Бұл таңбасы ауыспалы қатар Лейбниц белгісі бойынша $1-\dfrac{p+1}{q} \,\square\, 0 \Rightarrow \dfrac{p+1}{q} \,\square\, 1$ болса жинақталады. Ал, енді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$$

қатарын төменнен бағаласақ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\sin t dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{((2n+1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin t dt=$$

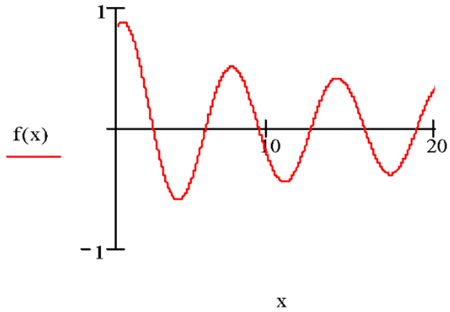
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos 2n\pi-\cos(2n-1)\pi)}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos(2n+1)\pi-\cos 2n\pi)}{((2n+1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}=$$

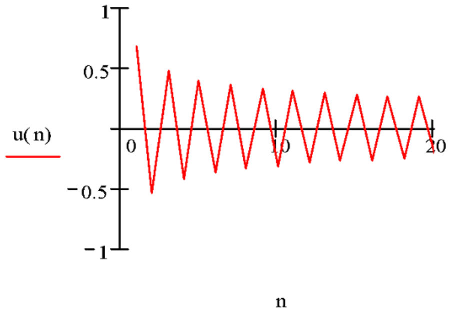
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{((2n+1)\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{1-\frac{p+1}{q}}}$$

Бұл қатар $1-\frac{p+1}{q}<0\Rightarrow\frac{p+1}{q}>1$ жағдайда жинақтылықтың қажетті шарты орындалмағандықтан, яғни, жалпы мүше 0-ге ұмтылмағандықтан жинақсыз болады.

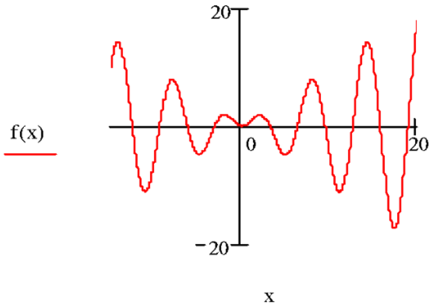
Ендеше, $-1<\frac{p+1}{q}<1$ орындалса ғана берілген интеграл жинақталады.

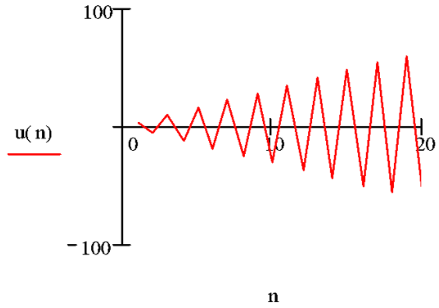
Төменде $\frac{p+1}{q}=\frac{2}{3}$ болғанда $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sin x$ функциясының, $u(n)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{\frac{1}{3}}}$ жалпы мүшенің графиктері келтірілген:





Ал, мынау $\frac{p+1}{q}=2$ болғанда $f(x)=x\ \sin x$ функциясының, $u(n)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^{-1}}$ жалпы мүшенің графиктері:





Енді абсолютті және шартты жинақтылыққа зерттейік. Берілген интеграл $-1<\frac{p+1}{q}<1$ аралығында ғана жинақты. Мынадай жағдайларды қарастырайық:

1) $-1<\frac{p+1}{q}<0$:
$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\right|dt=\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt\le\int_0^1\frac{t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$$

Теңсіздіктің оң жағындағы бірінші қосылғыш - екінші текті меншіксіз интеграл, ол $-\frac{p+1}{q}<1\Rightarrow\frac{p+1}{q}>-1$ болғандықтан жинақты (7-мысал), ал, екінші қосылғыш – бірінші текті, ол $1-\frac{p+1}{q}>1\Rightarrow\frac{p+1}{q}<0$ болғанда жинақталады. Яғни, берілген интеграл $-1<\frac{p+1}{q}<0$ орындалса абсолютті жинақты.

2) $0\le\frac{p+1}{q}<1$: $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\right|dt\ge\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ теңсіздігі ақиқат.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ жинақсыз интеграл, себебі:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt=\int_0^{1}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$$

деп алып, бірінші қосылғышты $t=0$ нүктесінің маңайында бағаласақ:

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\,dt \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^1 \frac{t^2}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{-1-\frac{p+1}{q}}}dt$$

$\int_0^1 \frac{1}{t^{-1-\frac{p+1}{q}}}dt$ интегралы екінші текті, $-1-\frac{p+1}{q} < 1 \Rightarrow \frac{p+1}{q} > -2$ орындалғанда жинақталады. Ендеше ол $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ аралығында жинақты.

Екінші қосылғышты төмендегідей қарастырайық:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\,dt\right)$$

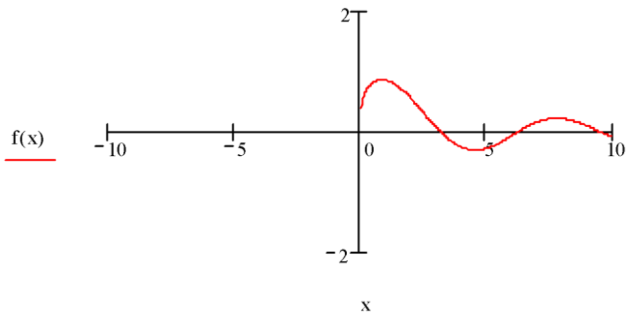
Азайғыш – 1-текті, ол $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ аралығында жинақсыз (2-мысал), азайтқыш Дирихле белгісі бойынша $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ аралығында жинақты. Олай болса,

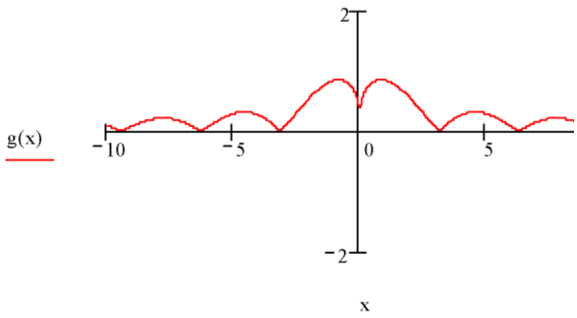
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ интегралы $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ аралығында жинақсыз. Демек, салыстыру

белгісі бойынша $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\right| dt$ - жинақсыз интеграл. Ендеше, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ интегралының жинақтылығы шартты.

Қорытындысында, $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx,$ интегралы $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ болса абсолютті жинақты, $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$ болса шартты жинақталады. Төменде $\frac{p+1}{q} = -\frac{1}{3}$

болғанда: $f(x) = x^{-\frac{4}{3}} \sin x$, $g(x) = \left|x^{-\frac{4}{3}} \sin x\right|$ функцияларының графиктері:





6. Коши мағынасындағы бас мән

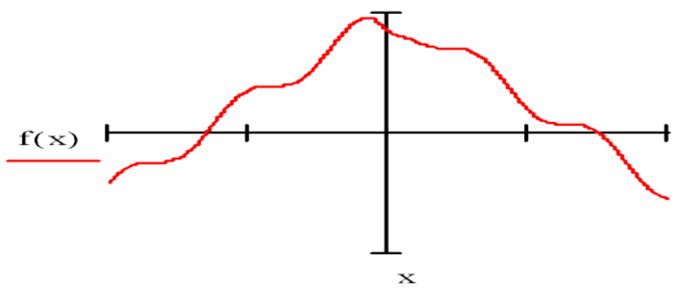
Анықтама. $f(x):\Re\to\Re$ берілген және $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз.

Егер $f(x)$ функциясы $-\infty < x < +\infty$ түзуінің кез келген сегментінде Риман бойынша интегралданса және

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$$

шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясын Коши бойынша интегралданады деп, ал шектің мәнін *Коши мағынасындағы бас мән* деп атайды, былай белгілейді:

$$v.p.\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$$



Анықтама. $f(x):[a;b]\setminus\{c\}\to\Re,\quad x\in(a;b)$ берілген және $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ - жинақсыз интеграл, $x=c$ - ерекше нүкте болсын. Егер кез келген жеткілікті аз $\varepsilon > 0$ үшін

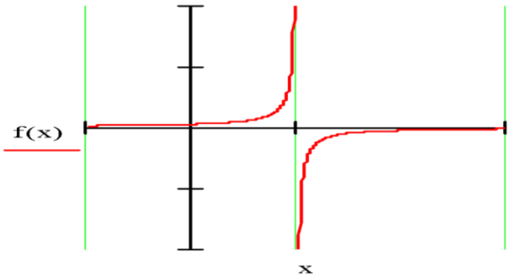
$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

интегралдары бар болса және

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$$

табылса, онда $f(x)$ функциясын Коши бойынша интегралданады деп, ал шектің мәнін *Коши мағынасындағы бас мән* деп атайды, былай белгілейді:

$$v.p. \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right), \quad \varepsilon > 0$$



Ескерту 5. $v.p. \ - \ $"$Valeur \quad principal$" француз сөздерінің бастапқы әріптері, аудармасы "бас мән" мағынасын береді.

Бас мәннің анықтамасының меншіксіз интегралдың анықтамасынан айырмашылығы: меншіксіз интегралдың анықтамасында

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A'' \to +\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x)dx$$

A', A'' бір-бірінен тәуелсіз $-\infty$-ке және $+\infty$-ке ұмтылады. Ал, Коши бойынша интеграл симметриялы аралықтағы $\int_{-A}^{A} f(x)dx, \quad (A \to +\infty)$ интегралдың шегі деп қарастырылады.

Мысал 13. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ интегралдың Коши мағынасындағы бас мәнін табыңыз.

Шешуі. Бұл ерекше нүктесі $x = 0$ болатын, 2-текті меншіксіз интеграл.

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}dx + \int_{\sigma}^{1} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\sigma}^{1} = \ln\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

өрнегінің $\varepsilon, \quad \sigma$ бір-бірінен тәуелсіз нөлге ұмтылғанда шегі табылмайды. Сондықтан, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ интегралы жинақталмайды. Алайда,

$$v.p. \quad \int_{a}^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln 1 = 0 .$$

Ескерту 6. Егер меншіксіз интеграл бар болса, онда міндетті түрде оның бас мәні де бар. Ал, керісінше әруақытта орындала бермейді. Яғни, Коши мағынасындағы бас мәні бар болуынан меншіксіз интегралдың бар болуы шықпайды.