

Дәріс 7

Анықталмаған интегралдың
анықтамасы және оның қасиеттері.
Анықталмаған интегралдар кестесі.
Интегралдаудың негізгі әдістері:
айнымалыны ауыстыру, бөліктеп
▶ интегралдау

Тлеулесова А.М.

Анықтама. Егер $x \in (a, b)$ аралығында берілген $f(x)$ функциясы үшін

$$F'(x) = f(x)$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a, b) аралығындағы *алғашқы функциясы* деп аталады.

$$[F(x) + C]' = [F(x)]' = f(x)$$

Анықтама. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы дейді және ол $\int f(x) dx$ символымен белгіленеді.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Негізгі анықталмаған интегралдар кестесі

$$1. \int 0 \cdot dx = C;$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

Анықталмаған интегралдың қасиеттері

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow$$

$$\int f(kx+b)dx = | y = kx+b \Rightarrow y' = (kx+b)' = k \cdot 1 + 0 = k \Rightarrow dy = y' dx = k dx \Rightarrow$$

$$dx = \frac{1}{k} \cdot dy \Rightarrow \int f(kx+b)dx = \int f(y) \cdot \frac{1}{k} \cdot dy = \frac{1}{k} \cdot \int f(y)dy = \frac{1}{k} \cdot F(y) + C \Rightarrow$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C$$

Мысал.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{7dx}{3\sqrt[5]{2x^8}} dx &= \frac{7}{3\sqrt[5]{2}} \cdot \int x^{-\frac{8}{5}} dx = \frac{7}{3\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{8}{5}+1}}{-\frac{8}{5}+1} + C = \frac{7}{3\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{x^{-\frac{3}{5}}}{-\frac{3}{5}} + C \\ &= -\frac{7}{3\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{5x^{-\frac{3}{5}}}{3} + C = -\frac{35}{9\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{x^3}} + C = \frac{35}{9\sqrt[5]{2x^3}} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{3(\cos x + 2 + \frac{4}{x})}{11} dx &= \frac{3}{11} \int (\cos x + 2 + \frac{4}{x}) dx = \frac{3}{11} [\int \cos x dx + \int 2 dx + \int \frac{4}{x} dx] = \\ &= \frac{3}{11} (\sin x + 2x + 4 \ln x) + C; \end{aligned}$$

Интеграл таңбасы астындағы функцияның теңбе тең түрлендіру арқылы бір немесе бірнеше кестелік интегралға келтіру әдісі тікелей интегралдау деп аталады.

Тікелей интегралдау алгоритмі

- интеграл белгісі астындағы функцияны тепе-тең түрлендіру;
- анықталмаған интеграл қасиеттерін қолдану: тұрақтыны интегралдың алдына шығару, қосындының интегралын интегралдардың қосындысы түрінде жазу;
- интегралдар кестесін қолдану.

Интегралдарды табыңыздар:

$$1) \int (3x^5 - 6x^2 + 2x - 7 + \frac{4}{x^3}) dx;$$

$$2) \int (x^3 \cdot (2x + 3)^2) dx;$$

$$3) \int \frac{5x^6 - 15x^4 + x^2 - 7}{x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} dx;$$

Жауаптары:

$$1) 0,5x^6 - 2x^3 + x^2 - 7x - \frac{2}{x^2} + C;$$

$$2) \frac{2x^6}{3} + \frac{12x^5}{5} + \frac{9x^4}{4} + C;$$

$$3) x^5 - 5x^3 + x + \frac{7}{x} + C;$$

$$4) \frac{x^3}{3} - 4x + C;$$

Айнымалы енгізу тәсілі

Интегралды есептеуді жеңілдету үшін жиі айнымалыны енгізуді қолдану тиімді болады. Анықталмаған интегралда интегралдау айнымалысы x тен жаңа айнымалы u —ға көшу

$$x = \varphi(u), \quad dx = \varphi'(u) du$$

енгізуімен болатын тәсіл жаңа айнымалы енгізу тәсілі деп аталады және келесі түрде жазылады:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b); \quad 2x dx = d(x^2); \quad \cos x dx = d(\sin x); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

т. с. с. қарапайым жағдайларда
дифференциалды түрлендіріп, алмастыруды ойша жүргізу
арқылы интегралдауға болады.

Мысал.

$$\int (2x + 1)^6 dx = \left| \begin{array}{l} 2x + 1 = u \\ 2dx = du \\ dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int \frac{u^6}{2} du = \frac{u^7}{14} + C = \frac{(2x + 1)^7}{14} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \left| x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = \left(\frac{t^2-1}{2} \right)' dt = t dt \right| = \int \frac{t dt}{t+1} =$$

$$\int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln|t+1| + C = \left| t = \sqrt{2x+1} \right| =$$

$$\sqrt{2x+1} - \ln|\sqrt{2x+1}+1| + C$$

Бөліктеп интегралдау әдісі

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} \arctg x = u, \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ \cos x dx = dv, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Бекіту сұрақтары

- ▶ Алғашқы функцияның анықтамасын беріңіз.
- ▶ Анықталмаған интегралдың анықтамасын беріңіз.
- ▶ Анықталмаған интерал кестесі.
- ▶ Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру.
- ▶ Бөліктеп интегралдау формуласын жазыңыз.