

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

ӘОЖ 517.9 (043.3)

Қолжазба құқығында

АВИЛТАЙ НАУРЫЗБАЙ

**Импульстік әсері бар сингулярлы ауытқыған
дифференциалдық теңдеулер**

8D05401-Математика
білім беру бағдарламасы

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
Дауылбаев Мұратхан
Құдайбергенұлы, ф.-м.ғ.д.,
профессор

Шетелдік ғылыми кеңесші
Ахмет Марат, ф.-м.ғ.д.,
профессор, Орта-Шығыс
техникалық университеті,
Түркия

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ	4
1 СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН СЫЗЫҚТЫ ИМПУЛЬСТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР	12
1.1 Бірқабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы	12
1.1.1 Есептің қойылымы.	12
1.1.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі	13
1.1.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.	19
1.1.4 Мысал	22
1.2 Көпқабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы	23
1.2.1 Есептің қойылымы.	23
1.2.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі	24
1.2.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.	31
1.2.4 Импульсті сызықты коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер.....	35
1.2.5 Мысал	44
2 СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИМПУЛЬСТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР	46
2.1 Есептің қойылымы	46
2.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі	48
2.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.	58
2.3 Бір қабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы	59
2.4 Көп қабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы	64
2.5 Мысал 1	69
2.6 Мысал 2	72
ҚОРЫТЫНДЫ.....	75
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР	76

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері.

КІРІСПЕ

Математика табиғи процестердің математикалық моделін зерттейді. Кез келген математикалық модель белгілі деңгейде жуық болып табылады. Математикалық модель құру кезінде қарастырылып отырған құбылыстың барынша маңызды, басым ерекшеліктерін қамтуға тырысады. Екінші жағынан, аналитикалық немесе сандық есептеулер құбылыс туралы қажетті ақпарат беру үшін модель жеткілікті деңгейде қарапайым болуы керек.

Зерттеудің өзектілігі. Физика, химиялық кинетика, математикалық биология және басқа да көптеген салалардағы модельдер дифференциалдық теңдеулер түрінде сипатталады. Математикалық модель құру кезінде құбылысқа әсері шамалы деп есептелетін кейбір шамалар ескерілмейді. Нәтижесінде модельді айтарлықтай жеңілдетуге болады. Мұндай жеңілдетулер көбінесе физикалық түйсікке сүйенеді. Бірақ осы ескерілмеген шамалардың рөлі туралы сұрақ туындалады. Олардың құбылысқа әсері шынымен әлсіз бе, немесе керісінше, құбылыс туралы математикалық модельден алатын ақпаратты айтарлықтай өзгертеді ме? Осы сұрақтарға дұрыс жауап беру үшін алдыңғы модельде әсері шамалы деп алынып тасталған мүшелерді қамтитын кеңейтілген модельді қарастыру қажет. Әрі қарай, осы екі модельдің, яғни кеңейтілген және қарапайым модельдердің шешімдерінің қаншалықты жақын екені қарастырылады. Әдетте құбылысқа әсері аз деп саналатын факторларды ескергенде, кеңейтілген модельде қарапайым модельмен салыстырғанда өте аз көбейткішке ие қосымша мүше пайда болады. Осы өте аз көбейткішті *кіші параметр* деп атайды. Егер математикалық модель дифференциалдық теңдеу болса, онда кіші параметрдің зерттелетін құбылысқа әсері туралы сұрақ, дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің кіші параметрге тәуелділігін зерттеуге келіп тіреледі. Ал құрамында кіші параметрі бар кеңейтілген дифференциалдық теңдеу *ауытқыған теңдеу* деп аталады. Ауытқыған теңдеулер екі түрге бөлінеді: *сингулярлы ауытқыған* және *регулярлы ауытқыған*. Олардың анықтамасын бермей, сапалық жағынан айырмашылығын келесідей айтуға болады: егер ауытқыған есеп шешімі мен ауытқымаған есеп шешімі арасындағы айырмашылық аз ғана болса, онда *регулярлы ауытқыған*, ал кері жағдайда, яғни айырмашылық айтарлықтай үлкен болса, *сингулярлы ауытқыған* дейді. Немесе жоғары ретті туындыларында кіші параметрі бар дифференциалдық теңдеулерді сингулярлық ауытқыған теңдеулер деп айтуға болады. Келесі авторлардың: Л. Шлезингер [1], Г.Д. Биркгоф [2], П. Нуайон [3], В. Вазов [4], А.Х. Найфе [5], А.Н. Тихонов [6,7], М. И. Вишик, Л.А. Люстерник [8,9], Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский [10], А. Б. Васильева және В.Ф. Бутузов [11,12], Р.Э. О' Мэлли [13,14], Д. Р. Смит [15], В. Экхаус [16], К.В. Чанг және Ф. А. Хаус [17], Дж. Кеворкиан және Дж.Д. Коул [18], Сандерс және Ф. Верхулст [19], Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов [20], С.А. Ломов [21], М.И. Иманалиев [22], Қ.Ә. Қасымов [23-25] жұмыстарында осы типтегі теңдеулер теориясы құрылды және дамыды.

Сингулярлы ауытқыған теңдеулерге қызығушылық, олардың диффузия,

химиялық кинетика [26], математикалық биология [27, 28], физика, гидродинамика [29], техника [30, 31] және басқа да көптеген қолданбалы есептердің математикалық модельдері болып табылатындығымен түсіндіріледі. Ал енді нақты өмірдегі мысалдарды келтірсек, сингулярлық толқын кенеттен күш қолданылған жағдайда пайда болады, осыған мысал, жер сілкінісі апатты цунами толқынын әкелуі мүмкін [32], температураның кенеттен өзгерісі кеуекті материал үшін жылу цунамиін әкелуі мүмкін [33], ал сингулярлы сызықты емес осциллятор өте қызық түрде өзгереді [34]. Қазіргі уақытта сингулярлық толқындық қозғалыстар математикадағы өзекті тақырыпқа айналууда [35], әсіресе квази-периодты бифуркациялар [36], сингулярлық диссипациялар [37] және т.б.

Әртүрлі типтегі сингулярлы ауытқыған есептер көптеген кітаптарда [11-14, 38, 39, 40] талқыланады. Бұл есептер кіші параметрлерге тәуелді болғандықтан, шешім кіші параметр нөлге ұмтылғанда бірқалыпты сипатқа ие болмайды.

Кейбір сингулярлы ауытқыған есептерді зерттеу кезінде кіші параметр нөлге ұмтылғанда, бұл есептің шешімі бастапқы шарттары өзгертілген ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылады. Бұл жағдайда шешім үшін бастапқы секіріс құбылысы орындалады дейді. Бастапқы секірісті сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін зерттеу М.И. Вишик, Л.А. Люстерник [40] және Қ.Ә. Қасымов [41] еңбектерінен басталды. Қ.Ә. Қасымов бастапқы секірісі бар сингулярлы ауытқыған сызықты емес жүйелердің, интегро-дифференциалдық теңдеулердің және дербес туындылы гиперболалық теңдеулердің жалпы жағдайларын зерттеді [42-49] және [50,51] жұмыстарында жалғасын тапты.

Сонымен қатар, кейбір шеттік есептерді зерттеу кезінде шешімнің бастапқы нүктедегі кейбір туындылары параметрдің жеткілікті аз мәнінде шексіз үлкен болатын жағдайлар туындайды. Бұл жағдайларда шеттік есеп бастапқы секірісі бар көмекші Коши есебіне пара-пар болып шығады. Мұндай есептер бастапқы секірісті шеттік есептер деп аталады [52]. Сингулярлы ауытқыған жай дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған бастапқы секірісі бар шеттік есептер [53-56] еңбектерінде зерттелді.

Кіші параметрі бірнеше жоғарғы туындыларының алдына кіретін жоғарғы ретті дифференциалдық және интегралды-дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есептер [57-61] жұмыстарында қаралды. Бұл есептердің ғылыми жаңалығы кіші параметр нөлге ұмтылғанда шешімнің кейбір туындылары кесіндінің бастапқы нүктесінде ғана емес, екінші шетінде де шексіздікке кететіндігінде. Бұл құбылыс шекаралық секіріс құбылысы деп аталады.

Сингулярлы ауытқыған есептердің шешімдерін жуықтаудың әртүрлі асимптотикалық әдістері бар. Ол әдістер кез-келген дәлдікте бірқалыпты жуықтауды құруға мүмкіндік береді. Сингулярлы ауытқыған есептер шешімдерінің асимптотикалық шешімдерін құрудың негізгі әдістерінің бірі болып шекаралық функциялар әдісі табылады [8, 11, 12, 22].

Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің келесі моделін қарастырайық

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= f(z, y, t), \\ y' &= g(z, y, t), \end{aligned}$$

мұндағы ε – оң кіші параметр. Бұл жүйе Тихонов типіндегі жүйе деп аталады. Осы жүйеге негізделген шектік көшу теоремасы Тихонов теоремасы деп аталады [11-13]. Егер қарастырылып отырған аймақта Тихонов теоремасының шарттары орындалса, онда сингулярлы ауытқыған есептерді шешу үшін шекаралық функциялар әдісін қолдануға болады. Диссертациялық жұмыста негізгі нәтижелерді алу үшін шекаралық функциялар әдісінің модификациясы қолданылды.

Импульстік әсерлер әртүрлі эволюциялық құбылыстарда кездеседі [62-66]. Импульсті дифференциалдық теңдеулер физика, инженерия [67], биология, химия [68] және медицина [69] сияқты көптеген ғылым салаларында маңызды рөл атқарады. Олар кейбір табиғи құбылыстарды жақсы сипаттай алады. Мысалы, инженерлік жүйелердегі хаос пен бифуркацияны басқару, импульсивті туу эпидемиясының моделі [69] және күрделі динамикалық жүйелерді модельдеу және басқару [70]. Осы модельдердің кейбірі кіші параметрі бар импульстік жүйелер түрінде, яғни сингулярлы ауытқыған импульстік жүйелер түрінде модельденеді [71-73]. Сингулярлық ауытқыған импульстік дифференциалдық теңдеулер күрделі болғандықтан нақты шешім табу қиындық тудырады, сондықтан бұл салаға қызығушылық жоғары деңгейде.

Байнов пен Ковачев [65] алғаш рет Тихонов теоремасының импульстік аналогын келесі түрде кеңейтті

$$\varepsilon' = f(z, y, t), \quad y' = g(z, y, t), \quad (1a)$$

$$\Delta z|_{t=t_i} = I_i(y(t_i)), \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(y(t_i)), \quad (1b)$$

мұндағы $i = 1, 2, \dots, p$ және $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$. Жалпы импульстік жүйе дифференциалдық теңдеулерден (1a) және импульстік теңдеулерден (1b) тұрады. [66-68] жұмыстарда кіші параметр тек дифференциалдық теңдеулерде болатын, бірақ импульстік бөлігіне қатыспайтын жүйелер қарастырылды. Яғни бұл жүйелердің дифференциалдық бөлігі ғана сингулярлы ауытқыған болады.

[74] жұмыста авторлар жүйені соққы моменттерінде сингулярлы болатындай етіп қарастырды, яғни туындының алдында және соққы моменттерінде кіші параметрі бар. Осы мақалалардың нәтижесінде зерттеушілерге бастапқы модельдерді жуықтау және күрделілікті азайту үшін ауытқымаған жүйелерді қарастыратын сингулярлық есеп қойылды. Осылайша, үзіліс динамикасы үшін сингулярлық ұғымы айтарлықтай кеңейеді.

Ахмет және Чаг [75, 76] жұмыстарында алғаш рет дифференциалдық теңдеуден бөлек, импульсті бөлігіде сингулярлы болатын келесі Ахмет типті жүйені қарастырды:

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= f(z, y, t), & y' &= g(z, y, t), \\ \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= I(z, y, \varepsilon), & \Delta y|_{t=\eta_j} &= J(z, y), \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы ε — оң кіші параметр, z, f және I — m өлшемді функциялар, y, g және J — n өлшемді функциялар, z^0 және y^0 — ε -нен тәуелсіз болсын, $\theta_i, i=1,2,\dots,p$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T - (0, T)$ интервалындағы үзіліс моменттері. Сонымен қатар, импульстік функцияның кіші параметр нөлге ұмтылғанда импульсті функцияның шексіздікке кетуін болдырмайтын келесі шарттар қойылды:

$$\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi,y,0)} \frac{I(z,y,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \text{ және } \lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi,y,0)} \frac{I(z,y,\varepsilon)}{\varepsilon} = I_0 \neq 0, \quad (*)$$

Осы шартқа байланысты екі жағдай көрсетілді: бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық. Егер шекаралық қабат тек бастапқы нүктенің маңайында ғана болса, бір қабатты сингулярлық жағдай, ал шекаралық қабат бастапқы нүктенің маңында ғана емес, сонымен қатар әрбір үзіліс моментінде болса, онда көпқабатты шекаралық құбылыс деп аталады. [76] мақалада импульс теңдеуіне кіші параметрді енгізу арқылы үзіліс динамикасы үшін сингулярлық ұғымы едәуір кеңейтілді және шектік көшу $y(t, \varepsilon)$ үшін толық $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде бірқалыпты болатынын, ал $z(t, \varepsilon)$ үшін $0 \leq t \leq T$ толық интервалда емес, тек шекаралық қабаттың сыртында, $\delta \leq t \leq \theta_i, i=1,2,\dots,p$, $\delta > 0$ интервалдарда бірқалыпты болатыны дәлелденді. Жүйенің импульстік бөлігінің ерекшелігін ауытқулар теориясының әдістерін қолдану арқылы қарастыруға болады. Сонымен қатар, жоғарыдағы (2) сингулярлық импульстік модельді гомотопиялық ауытқу әдісі арқылы зерттеуге болады [77]. [76] жұмыстағы басты жаңалық Тихонов теоремасын (2) жүйедегі импульстік функцияларға кіші параметр енгізіп және үзіліс моменттері әр тәуелді айнымалы үшін әр түрлі болатындай етіп кеңейту болып табылады. Алайда, [76] мақаладағы теоремалар $y(t, \varepsilon)$ шешімі үшін $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде, ал $z(t, \varepsilon)$ үшін шекаралық қабат сыртында кез келген дәлдікте асимптотикалық жуықтауды бермейді.

Диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеуі ғана сингулярлы емес, сонымен қатар импульстік теңдеуде сингулярлы ауытқыған жүйелер қарастырылады. Осы жұмыстың мақсаты сингулярлы ауытқыған импульстік жүйе шешімі үшін кез-келген дәлдікпен толық асимптотикалық қатар құру болып табылады. Ол үшін шекаралық функциялар әдісін қолданылып, $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде бірқалыпты болатын шешімнің асимптотикалық жуықтауы құрылады.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуін құру. Қарастырылып отырған есептің ерекшеліктерін анықтау.

Зерттеу нысаны. Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста келесі заманауи әдістердің тиімді комбинациялары қолданылды:

- Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулерді интегралдаудың асимптотикалық әдістері;

- Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы;

- Шекаралық функциялар әдісі;

- Импульсті дифференциалдық теңдеулер теориясы.

Теориялық және практикалық құндылығы. Жоғары туындысында кіші параметрі бар дифференциалдық теңдеулер көптеген ғалымдардың зерттеу нысаны болып табылды. Өйткені, олардың гидродинамикада (Навье-Стокс теңдеуі), радиотехникада және басқа механика, физика, техника (Шредингер теңдеуі) есептерінде колданбалы маңызы бар. Ал сингулярлы ауытқыған импульстік дифференциалдық теңдеулер кейбір табиғи құбылыстарды жақсы сипаттай алады. Олардың ішінде инженерлік жүйелердегі хаос пен бифуркацияны басқару, импульсивті туу эпидемиясының моделі және күрделі динамикалық жүйелерді модельдеу және басқару т.б. Сингулярлық ауытқыған импульстік дифференциалдық теңдеулер күрделірек болғандықтан нақты шешім табу қиындық тудырады, сондықтан бұл салаға қызығушылық жоғары деңгейде.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық, интегро-дифференциалдық және импульстік теңдеулер шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары» (№АР23488301, 2024-2026 жж.) жобасы аясында қаржыландырылып орындалды және докторант Н. Авилтай жоба орындаушысы ретінде қатысып келеді.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста бұрын зерттелінбеген қойылымдағы есептер қарастырылып, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

- Сингулярлы ауытқыған сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

- Сингулярлы ауытқыған импульсті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

- Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық жуықтауының мүшелерін анықтайтын алгоритм құрылды;

- Импульсті функцияға қойылған шартқа байланысты бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық құбылыстар анықталды;

- Шешімнің асимптотикасының негіздемесі көрсетілді;

- Моделдеу арқылы сандық мысалдар келтірілді;

1. Аппробация. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-8 сәуір, 2021ж.), «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-7 сәуір, 2023ж.), «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» халықаралық ғылыми-

практикалық конференциясында (Ош қ., Қырғызстан, 26-27 қыркүйек 2024 ж.), «Уфимская осенняя математическая школа—2024» халықаралық ғылыми конференциясында (Уфа қ. Ресей, 2-5 қазан 2024 ж.), «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясында (Алматы қ., Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 жыл), «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» X халықаралық ғылыми конференциясында (Қазақстан, Алматы, 24-26 қыркүйек, 2025), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультеті математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Зерттеу жұмысындағы алынған нәтижелер осыған дейін белгілі ғалымдар жасаған дәлелдемелермен, индекстелеген халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сонымен қатар конференция материалдары арқылы расталады.

Жарияланымдар. Диссертацияның нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды:

–*Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:*

1. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // Carpathian Journal of Mathematics. 2024; 40(3): 581–598. Scopus: 81%, Web of Science: Q1.
2. Asymptotic convergence of solutions for singularly perturbed linear impulsive systems with full singularity // Symmetry. 2025; 17(9):1389. Scopus: 93%, Web of Science: Q2.
3. A case of impulsive singularity // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2023; 117(1): 3–14. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.
4. Asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021; 112(4): 13–28. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.
5. Asymptotic expansion of the solution for singular perturbed linear impulsive systems // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2024; 122(2): 14–26. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.
6. Asymptotic solutions to initial value problems for singularly perturbed quasi-linear impulsive systems// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2025; 127(3): 13–28. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.

–*Халықаралық ғылыми конференциялардың еңбектеріндегі жарияланымдар:*

1. Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық сипаты // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2021 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2021. –12 б.).

2. Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық тендеулер жүйесі // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2023 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2023. –5 б.).

3. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы, Ош қ., Қырғызстан, 26-27 қыркүйек 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Ош –2024. –17 б.).

4. Асимптотическое разложение решения задачи для сингулярно возмущенных линейных импульсных системы с сингулярными импульсами // «Уфимская осенняя математическая школа—2024» халықаралық конференциясы, Уфа қ., Ресей, 2-5 қазан 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Уфа –2024. –2-том, 7-8 б.,).

5. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясы», Алматы қ., Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 жыл: баяндамалар тезистері. (Алматы–2025. 82 б.)

6. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» X халықаралық ғылыми конференциясы, Қазақстан, Алматы, 24-26 қыркүйек, 2025.

Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 6 жұмыс жарияланды, оның ішінде: – Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша бірінші (Q1) квартильге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентиі 79 болатын 1 мақала, – Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша бірінші (Q2) квартильге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентиі 93 болатын 1 мақала және (Q4) квартильге енгізілген процентиі 18 болатын ғылыми журналдардағы 4 мақала; – Халықаралық конференциялардың тезистер жинағында 6 жарияланым.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық зерттеу жұмысы нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, негізгі екі бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның көлемі 81 бет.

Диссертацияның мазмұны. Ұсынылған диссертациялық жұмыстың кіріспесінде зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, зерттеу әдістері, теориялық және практикалық құндылығы, сонымен қатар диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілген.

Бірінші бөлімде сингулярлы ауытқыған импульсті сызықты дифференциалдық тендеулер үшін бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуі қарастырылды. Шешімнің жуықтау мүшелерін табу алгоритмі анықталды. Кейін Васильева теоремасының аналогы тұжырымдалып, шешімнің бар және жалғыз болатыны дәлелденді.

Жұмыстың 1.1 ішкі бөлімінде сингулярлы ауытқыған коэффициенттері айнымалы сызықты импульсті дифференциалдық тендеулер үшін бастапқы

есеп қарастырылды. Импульсті функцияға байланысты бірқабатты сингулярлық құбылысы анықталды.

Жұмыстың 1.2 ішкі бөлімінде сингулярлы ауытқыған коэффициенттері айнымалы сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылды. Импульсті функцияға байланысты көпқабатты сингулярлық құбылысы анықталды.

Екінші бөлімде сингулярлы ауытқыған сызықты емес импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылды. Импульсті функцияға байланысты бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық құбылыстар анықталды. Теориялық нәтижені растау үшін моделдеу арқылы сандық мысалдар келтірілді.

Қорытынды бөлімде жалпы алынған нәтижелерге талдаулар жасалынды.

Алғыс. Автор отандық ғылыми кеңесшісі – әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің механика-математика факультетінің «Математика» кафедрасының профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы Дауылбаев Мұратхан Құдайбергенұлына және шетелдік ғылыми кеңесшісі-Таяу Шығыс техникалық университеті «Математика» кафедрасының профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы Ахмет Марат Убайдуллаұлына диссертациялық жұмысты орындау кезіндегі құнды кеңестері мен жан-жақты қолдаулары үшін шынайы алғысын білдіреді.

Автор Қазақстан Республикасының Үкіметіне және әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетіне көрсеткен қолдаулары үшін және шетелдік ғылыми кеңесшімен жұмыс жасауға мүмкіндік бергені үшін рақмет айтады.

1 СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН СЫЗЫҚТЫ ИМПУЛЬСТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл бөлімде сингулярлы ауытқыған сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы есеп қарастырылады.

1.1 Бірқабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы

Бұл бөлімшеде сингулярлы ауытқыған коэффициенттері айнымалы сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бірқабатты сингулярлық құбылысы қарастырылады. Шешімнің асимптотикалық жіктелуі құрылады.

1.1.1 Есептің қойылымы.

Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_1(t)z(t, \varepsilon) + B_1(t)y(t, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t)z(t, \varepsilon) + B_2(t)y(t, \varepsilon) + f_2(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

және

$$\begin{aligned}\varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)z(\theta_i, \varepsilon) + C_2(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon), \\ \Delta y|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon) + I_2(\theta_i),\end{aligned}\tag{1.2}$$

импульстік жүйелерді

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0,\tag{1.3}$$

бастапқы шарттармен қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, z^0 және y^0 – ε кіші парметрiнен тәуелсіз тұрақтылар, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T$, $\theta_i \in (0, T)$ аралығындағы әртүрлі үзіліс моменттері.

Бастапқы берілген (1.1)-(1.3) есеп шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда төмендегі ауытқымаған есеп шешіміне ұмтылады:

$$\begin{aligned}0 &= A_1(t)\tilde{z}(t) + B_1(t)\tilde{y}(t), & 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}(\theta_i), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= A_2(t)\tilde{z}(t) + B_2(t)\tilde{y}(t) + f_2(t), & \Delta\tilde{y}|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}(\theta_i) + I_2(\theta_i), \\ \tilde{y}(0) &= y^0.\end{aligned}$$

Келесі шарттар орындалсын:

C1) $A_i(t), B_i(t), f_2(t), I_2(t), i=1,2$, және $C_i(t), i=1,2,3$, функциялары $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде шексіз дифференциалдансын.

C2) $A_1(t) < 0$, $0 \leq t \leq T$ болсын.

C3) $1 + C_3(\theta_i) \neq 0$.

C4) $\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{C_1(\theta_i)z(\theta_i, \varepsilon) + C_2(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$,

мұндағы $\tilde{y}$ - әрбір $t = \theta_i, i = \overline{1, p}$. импульс моментіндегі $\tilde{y}(\theta_i)$ шешімінің мәні.

1.1.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі

Енді (1.1)-(1.3) есеп шешімінің формальді асимптотикалық жіктелуін келесі түрде іздейміз:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= \tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \quad \theta_i < t \leq \theta_{i+1}, \\ y(t, \varepsilon) &= \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_{p+1} = T, \quad i = \overline{0, p}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t), & \tilde{y}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{y}_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), & \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \quad i = \overline{0, p}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сондай-ақ (1.5) жіктелудегі $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_k^{(i)}(\tau_i)$ функциялары шекаралық функциялар деп аталады және оларға төмендегідей қосымша шарт қойылады:

$$\omega_k^{(i)}(\infty) = 0, \nu_k^{(i)}(\infty) = 0, \quad i = \overline{0, p}. \quad (1.6)$$

Жоғарыдағы (1.4) жіктелуді (1.1) жүйеге қойсақ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{z}'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) &= A_1(t)(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + B_1(t)(\tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)), \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) + \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_2(t)(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + B_2(t)(\tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + f_2(t). \end{aligned}$$

Соңғы теңдеулерден (1.5) жіктелудегі регулярлы және шекаралық қабатты мүшелерді анықтайтын екі типті теңдеулер алынады

$$\begin{aligned} \tilde{z}'(t, \varepsilon) &= A_1(t)\tilde{z}(t, \varepsilon) + B_1(t)\tilde{y}(t, \varepsilon), \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) &= A_2(t)\tilde{z}(t, \varepsilon) + B_2(t)\tilde{y}(t, \varepsilon) + f_2(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

және

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_1(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \\ \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_2(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon B_2(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Енді $A_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i), B_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i), i=1,2$, функцияларын ε дәрежесі бойынша қатарға жіктейік,

$$\begin{aligned}A_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i) &= A_i(\theta_i) + A'_i(\theta_i)\varepsilon\tau_i + A''_i(\theta_i)\frac{(\varepsilon\tau_i)^2}{2!} + \dots, \\ B_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i) &= B_i(\theta_i) + B'_i(\theta_i)\varepsilon\tau_i + B''_i(\theta_i)\frac{(\varepsilon\tau_i)^2}{2!} + \dots\end{aligned}$$

Жоғарыдағы (1.7), (1.8) теңдеулердің екі жағынан ε бірдей дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы, (1.5) асимптотикалық жіктелудің мүшелерін анықтайтын қарапайым дифференциалдық теңдеулер тізбегі алынады:

$$\varepsilon^0 : 0 = A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), \quad (1.9)$$

$$\tilde{y}'_0(t) = A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t),$$

$$\varepsilon^1 : \tilde{z}'_0(t) = A_1(t)\tilde{z}_1(t) + B_1(t)\tilde{y}_1(t), \quad (1.10)$$

$$\tilde{y}'_1(t) = A_2(t)\tilde{z}_1(t) + B_2(t)\tilde{y}_1(t),$$

$$\varepsilon^k : \tilde{z}'_{k-1}(t) = A_1(t)\tilde{z}_k(t) + B_1(t)\tilde{y}_k(t), \quad k \geq 2 \quad (1.11)$$

$$\tilde{y}'_k(t) = A_2(t)\tilde{z}_k(t) + B_2(t)\tilde{y}_k(t),$$

және

$$\varepsilon^0 : \dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = A_1(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i), \quad (1.12)$$

$$\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) = A_2(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i),$$

$$\varepsilon^k : \dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) - A_1(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) = \Phi_k(\tau_i), \quad (1.13)$$

$$\dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) - A_2(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) = \Psi_k(\tau_i),$$

мұндағы $\Phi_k(\tau_i), \Psi_k(\tau_i)$ функциялары $\omega_j^{(i)}(\tau_i), \nu_j^{(i)}(\tau_i), j < k$ функциялары арқылы рекурентті түрде өрнектеледі.

Алдымен $t \in [0, \theta_1]$ кесіндісін қарастырайық. Енді алынған теңдеулерден (1.5) жіктелудің элементтерін табу үшін бастапқы шарт қажет. Сол себепті (1.4) қатарды (1.3) бастапқы шартқа қойсақ, онда

$$\begin{aligned}\tilde{z}_0(0) + \varepsilon \tilde{z}_1(0) + \dots + \omega_0^{(0)}(0) + \varepsilon \omega_1^{(0)}(0) + \dots &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) + \varepsilon \tilde{y}_1(0) + \dots + \nu_0^{(0)}(0) + \varepsilon^2 \nu_1^{(0)}(0) + \dots &= y^0,\end{aligned}\quad (1.14)$$

теңдіктерін аламыз.

Содан кейін ε бірдей дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек, келесі бастапқы шарттары алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \tilde{z}_0(0) + \omega_0^{(0)}(0) &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) &= y^0,\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}_k(0) + \omega_k^{(0)}(0) &= 0, \\ \tilde{y}_k(0) + \nu_{k-1}^{(0)}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Келесі қадамда асимптотиканың басты регулярлы бөлігі $\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)$ функцияларын анықтайтын

$$\begin{aligned}0 &= A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), \\ \bar{y}'_0(t) &= A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t), \quad \tilde{y}_0(0) = y^0,\end{aligned}$$

есебі алынады және ол ауытқымаған есеппен сәйкес келеді. Кейін $\omega_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясын табу үшін

$$\dot{\omega}_0^{(0)}(\tau_0) = A_1(0)\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(0)}(0) = z^0 - \tilde{z}_0(0)$$

бастапқы шартымен шешеміз. Жоғарыдағы (1.12) формуладағы екінші теңдеуден және (1.16) қосымша шарттан

$$\nu_0^{(0)}(0) = \frac{A_2(0)}{A_1(0)}(z^0 - \tilde{z}_0(0)).\tag{1.17}$$

шығады. Онда

$$\dot{\nu}_0^{(0)}(\tau_0) = A_2(0)\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

теңдеуін (1.17) бастапқы шартымен шешу арқылы $\nu_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясы табылады.

Асимптотиканың келесі мүшелерін осы алгоритммен анықтаймыз. Айталық асимптотиканың $k-1$ номерін қоса алғандағы мүшелері табылсын. Онда (1.11)

$$\begin{aligned}\tilde{z}'_{k-1}(t) &= A_1(t)\tilde{z}_k(t) + B_1(t)\tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= A_2(t)\tilde{z}_k(t) + B_2(t)\tilde{y}_k(t),\end{aligned}$$

теңдеуден және

$$\tilde{y}_k(0) = -\nu_{k-1}^{(0)}(0)$$

бастапқы шарттан $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t)$ бірмәнді анықталады. Кейін (1.13) бірінші теңдеуден және (1.16) формуладан $\omega_k^{(0)}(\tau_0)$ функциясын анықтайтын келесі есеп алынады:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k^{(0)}(\tau_0) - A_1(0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) &= \Phi_k(\tau_0), \\ \omega_k^{(0)}(0) &= -\tilde{z}_k(0).\end{aligned}$$

Енді (1.13) формуладағы екінші теңдеуге (1.16) шартты қолдансақ,

$$\nu_k^{(0)}(0) = \frac{A_2(0)}{A_1(0)}\omega_k^{(0)}(0) + \int_0^\infty \left(\frac{A_2(0)}{A_1(0)}\Phi_k(s) - \Psi_k(s) \right) ds. \quad (1.18)$$

бастапқы шарты табылады. Соңғы (1.18) бастапқы шарт арқылы және

$$\dot{\nu}_k^{(0)}(\tau_0) - A_2(0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) = \Psi_k(\tau_0)$$

теңдеуінен $\nu_k^{(0)}(\tau_0)$ табылады.

Осыдан кейін $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = \overline{1, p}$ интервалын қарастырайық. Бұл интервал үшін бастапқы шарт ретінде $\tilde{z}(\theta_i+, \varepsilon)$ және $\tilde{y}(\theta_i+, \varepsilon)$ мәндері алынады. Енді (1.4) асимптотикалық жіктелуді (1.2) импульсті теңдеулерге қойсақ,

$$\begin{aligned}& \varepsilon(\tilde{z}(\theta_i+, \varepsilon) + \omega^{(i)}(0, \varepsilon) - \tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) - \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) = \\ &= C_1(\theta_i)(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) + \\ &+ C_2(\theta_i)(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon\nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)), \\ &\tilde{y}(\theta_i+, \varepsilon) + \varepsilon\nu^{(i)}(0, \varepsilon) - \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) - \varepsilon\nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon) = \\ &= C_3(\theta_i)(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon\nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) + I_2(\theta_i).\end{aligned}$$

теңдіктерін аламыз және (1.5) формуланы ескеріп, ε кіші параметрінің бірдей

дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек, келесі бастапқы шарттар табылады:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 : 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_0(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i), \\
\Delta\tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i) + I_2(\theta_i), \\
\varepsilon^1 : \omega_0^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_1(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \\
\Delta\tilde{y}_1|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) - \nu_0^{(i)}(0), \\
\varepsilon^k : \omega_k^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \\
\Delta\tilde{y}_k|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_k(\theta_i) - \nu_{k-1}^{(i)}(0).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Жуықтаудың $\tilde{z}_0(t)$ және $\tilde{y}_0(t)$ мүшелерін анықтау үшін төмендегі есеп алынады:

$$\begin{aligned}
0 &= A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), & 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_0(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i), \\
\tilde{y}'_0(t) &= A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t), & \Delta\tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i) + I_2(\theta_i).
\end{aligned}$$

Ал $\omega_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясын табу үшін

$$\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = A_1(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(i)}(0) = C_1(\theta_i)\tilde{z}_1(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_0|_{t=\theta_i},$$

бастапқы шартымен шешеміз, мұндағы $\omega_0^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде түрлендіруге болады. (1.9) формуланың бірінші теңдеуінен және (1.19) теңдеуден

$$\tilde{z}_0(t) = -\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\tilde{y}_0(t), \quad \tilde{z}_0(\theta_i) = -\frac{C_2(\theta_i)}{C_1(\theta_i)}\tilde{y}_0(\theta_i),$$

теңдіктері шығады. Бұдан

$$\frac{B_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} = \frac{C_2(\theta_i)}{C_1(\theta_i)}. \tag{1.20}$$

аламыз. Онда (1.10) теңдеуі төмендегідей жазылады:

$$\tilde{z}_1(t) + \frac{B_1(t)}{A_1(t)}\tilde{y}_1(t) = -\frac{\tilde{z}'_0(t)}{A_1(t)}.$$

Нәтижесінде соңғы теңдікті және (1.20) теңдікті қолдансақ, $\omega_0^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде өзгертіп жазуға болады:

$$\omega_0^{(i)}(0) = -\frac{C_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \tilde{z}'_0(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, i = \overline{1, p}.$$

Енді (1.12) теңдеуді τ_i дан ∞ интегралдап және (1.6) қосымша шартты қолдансақ, онда келесі бастапқы шарт

$$\nu_0^{(i)}(0) = \frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \omega_0^{(i)}(0), i = \overline{1, p}. \quad (1.21)$$

анықталады. Соңғы (1.21) шарттан және

$$\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) = A_2(\theta_i) \omega_0^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$$

теңдеуінен $\nu_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясы табылады.

Келесі кадамда k –шы жуықтау мүшелері $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t), k \geq 1$ функцияларын анықтау үшін

$$\begin{aligned} \tilde{z}'_{k-1}(t) &= A_1(t) \tilde{z}_k(t) + B_1(t) \tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= A_2(t) \tilde{z}_k(t) + B_2(t) \tilde{y}_k(t), \quad \Delta \tilde{y}_k|_{t=\theta_i} = C_3(\theta_i) \tilde{y}_k(\theta_i, \varepsilon) - \nu_{k-1}^{(i)}(0). \end{aligned}$$

есепі алынады. Ал $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ функциясы төмендегі есептен табылады:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) - A_1(\theta_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) &= \Phi_k(\tau_i), i = \overline{1, p}, \\ \omega_k^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i) \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + C_2(\theta_i) \tilde{y}_{k+1}(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \end{aligned}$$

мұндағы $\omega_k^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде өзгертіп жазуға болады. (1.11) формуланы келесі түрде жазайық,

$$\tilde{z}_{k+1}(t) + \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \tilde{y}_{k+1}(t) = \frac{\tilde{z}'_k(t)}{A_1(t)}.$$

Соңғы теңдеуден және (1.20) теңдіктерін қолданып, $\omega_k^{(i)}(0)$ шартын төмендегідей түрлендіруге болады:

$$\omega_k^{(i)}(0) = \frac{C_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \tilde{z}'_k(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, i = \overline{1, p}.$$

Енді (1.13) теңдеуден және (1.6) қосымша шарттан, келесі

$$\nu_k^{(i)}(0) = \frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \omega_k^{(i)}(0) + \int_0^\infty \left(\frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \Phi_k(s) - \Psi_k(s) \right) ds, i = \overline{1, p}. \quad (1.22)$$

бастапқы шарты анықталады. Онда

$$\dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) - A_2(\theta_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) = \Psi_k(\tau_i), i = \overline{1, p},$$

теңдеуінен және (1.22) бастапқы шартынан $\nu_k^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$. шекаралық функциясы табылады.

Сонымен, жоғарыдағы көрсетілген алгоритм арқылы (1.5) қатардың n номерін қоса алғанға дейінгі коэффициенттерін табуға болады. Сондай-ақ $\tau_i \geq 0$ болғанда $\omega_k^{(i)}(\tau_i), \nu_k^{(i)}(\tau_i), k \geq 0, i = \overline{0, p}$, шекаралық функцияларының

$$\begin{aligned} |\omega_k^{(i)}(\tau_i)| &\leq K \exp(-\gamma \tau_i), i = \overline{0, p}, \\ |\nu_k^{(i)}(\tau_i)| &\leq K \exp(-\gamma \tau_i), i = \overline{0, p}, \end{aligned}$$

экспоненциалды бағалауға ие екенін көрсетуге болады, мұндағы $K > 0, \gamma > 0 - \tau_i$ және ε тәуелсіз тұрақтылар.

1.1.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.

Теорема 1.1 Айталық (C1)–(C4) шарттары орындалсын. Онда кез-келген $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ үшін оң тұрақтылар ε_0 және c табылып, (1.1)-(1.3) есебінің $z(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ шешімі $[0, T]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)| &\leq c \varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T, \\ |y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)| &\leq c \varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

мұндағы $Z_n(t, \varepsilon) = Z_n^{(i)}(t, \varepsilon), Y_n(t, \varepsilon) = Y_n^{(i)}(t, \varepsilon), \theta_i < t \leq \theta_{i+1}, i = \overline{0, p}$,

$$\begin{aligned} Z_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), \\ Y_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, i = \overline{0, p}. \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Айталық, шешімнің $Z_n(t, \varepsilon), Y_n(t, \varepsilon)$ дербес қосындысы (1.1)-(1.3) есепті қанағаттандырсын:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dZ_n}{dt} &= A_1(t)Z_n(t, \varepsilon) + B_1(t)Y_n(t, \varepsilon) + \mathcal{E}f_1(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \frac{dY_n}{dt} &= A_2(t)Z_n(t, \varepsilon) + B_2(t)Y_n(t, \varepsilon) + f_2(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \varepsilon \Delta Z_n|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)Z_n(t, \varepsilon) + C_2(\theta_i)Y_n(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \Delta Y_n|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)Y_n(t, \varepsilon) + I_2(\theta_i) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ Z_n(0, \varepsilon) &= z^0, Y_n(0, \varepsilon) = y^0.\end{aligned}$$

Бастапқы берілген (1.1)-(1.3) есепке $z(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + Z_n(t, \varepsilon)$ және $y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + Y_n(t, \varepsilon)$ қойсақ, онда келесі теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du}{dt} &= A_1(t)u(t, \varepsilon) + B_1(t)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \frac{dv}{dt} &= A_2(t)u(t, \varepsilon) + B_2(t)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),\end{aligned}\tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \Delta u|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)u(t, \varepsilon) + C_2(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \Delta v|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ u(0, \varepsilon) &= 0, v(0, \varepsilon) = 0,\end{aligned}\tag{1.24}$$

Енді, (1.23)-(1.24) импульстік жүйені эквивалентті интегралдық теңдіктермен алмастырайық,

$$\begin{aligned}u(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s, \varepsilon) [B_1(s)v(s, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{0 < \theta_i < t} U(t, \theta_i, \varepsilon) \left(1 + \frac{C_1(\theta_i)}{\varepsilon} \right)^{-1} (C_2(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})),\end{aligned}\tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}v(t, \varepsilon) &= \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [A_2(s)u(s, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\ &+ \sum_{0 < \theta_i < t} \frac{O(\varepsilon^{N+1})}{1 + C_3(\theta_i)} V(t, \theta_i, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.26}$$

мұндағы $U(t, \theta_i, \varepsilon)$ және $V(t, \theta_i, \varepsilon)$ төмендегі жүйенің фундаменталды матрицасы

$$\varepsilon \frac{dU}{dt} = A_1(t)U, t \neq \theta_i, \varepsilon \Delta U|_{t=\theta_i} = C_1(\theta_i)U, U(s, s, \varepsilon) = E,$$

$$\frac{dV}{dt} = B_2(t)V, t \neq \theta_i, \Delta V|_{t=\theta_i} = C_3(\theta_i)V, V(s, s, \varepsilon) = E.$$

Бұл жүйедегі $U(t, s, \varepsilon)$ функциясы үшін

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}(t-s)\right), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

бағалауы орындалады.

Енді (1.26) теңдеу арқылы анықталған $v(t, \varepsilon)$ функциясын (1.25) өрнегіне қойсақ, онда

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t K(t, s, \varepsilon)u(s, \varepsilon)ds + W_1(t, \varepsilon),$$

аламыз, мұндағы $K(t, s, \varepsilon)$ шенелген өзек, ал $W_1(t, \varepsilon)$ функциясы $W_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Соңғы теңдеуді эквивалентті теңдеумен алмастырсақ,

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t R(t, s, \varepsilon)W_1(s, \varepsilon)ds + W_1(t, \varepsilon) = T_1(t, \varepsilon), \quad (1.27)$$

мұндағы $R(t, s, \varepsilon) = K(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы, $T_1(t, \varepsilon)$ функциясы $T_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Енді $u(t, \varepsilon)$ функциясын өрнектейтін (1.27) формуланы (1.26) теңдеуге қойсақ, онда

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, s, \varepsilon) \left[A_2(t)T_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}) \right] ds +$$

$$\sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (E + C_3(\theta_i))^{-1} (O(\varepsilon^{N+1})) = T_2(t, \varepsilon), \quad (1.28)$$

мұндағы $T_2(t, \varepsilon)$ функциясы $T_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Онда (1.23), (1.24) есеп шешімі келесі бағалауды қанағаттандырады

$$\|u(t, \varepsilon)\| = \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T,$$

$$\|v(t, \varepsilon)\| = \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T.$$

Нәтижеде теорема дәлелденді.

1.1.4 Мысал

Келесі жүйені

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dz}{dt} &= -(t+2)z - (t+1)y, & \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= (t+2)z + (t+1)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -(t+2)z - 12y, & \Delta y|_{t=\theta_i} &= 12y - 2z,\end{aligned}\tag{1.29}$$

төмендегідей бастапқы шартпен

$$z(0, \varepsilon) = 3, \quad y(0, \varepsilon) = 2.\tag{1.30}$$

карастырайық.

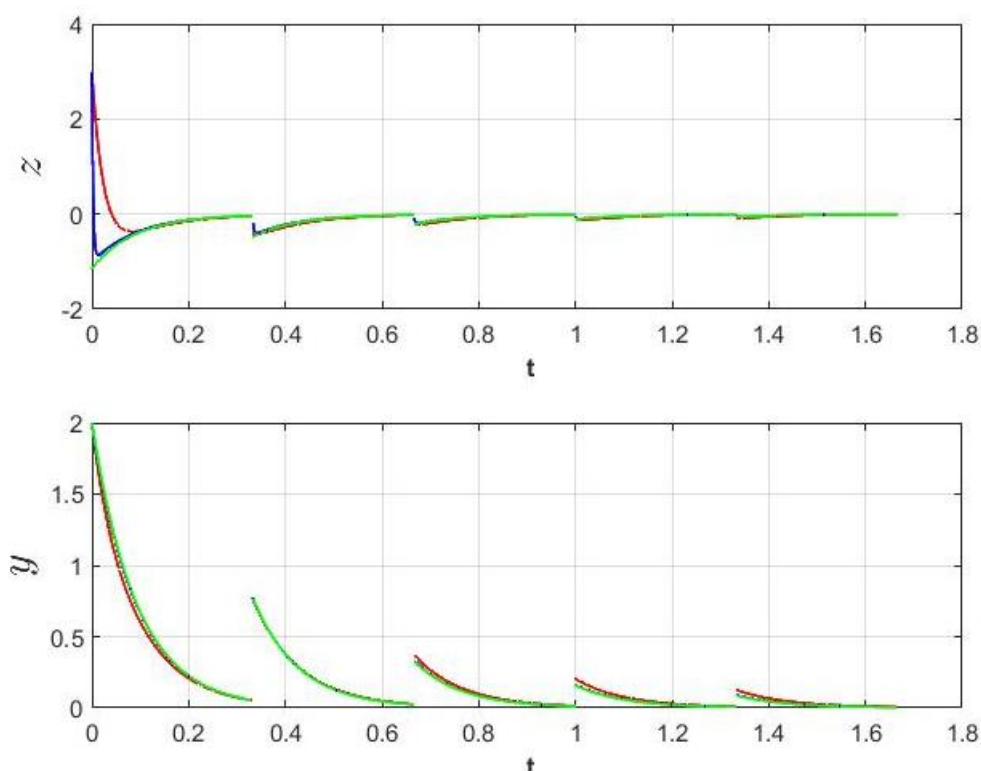
Берілген (1.29), (1.30) есеп шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда келесідей ауытқымаған есеп шешіміне ұмтылады:

$$\begin{aligned}0 &= -(t+2)\tilde{z} - (t+1)\tilde{y}, & 0 &= (t+2)\tilde{z} + (t+1)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= -(t+2)\tilde{z} - 12\tilde{y}, & \Delta \tilde{y}|_{t=\theta_i} &= 12\tilde{y} - 2\tilde{z}, \\ \tilde{y}(0) &= 2.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Бірінші жолдағы алгебралық теңдеуден $\tilde{z} = \varphi = -\frac{(t+1)}{(t+2)}\tilde{y}$ анықталады. Енді С4) шартын тексерейік,

$$\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{-(t+2)z - (t+1)y}{\varepsilon} = 0, \quad \theta_i = \frac{i}{3}, i = \overline{1,4}.$$

Онда (1.29) жүйенің (1.30) бастапқы шарттармен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t = 0$ нүктесінің маңайында шекаралық қабатқа ие. Ал $t = \theta_i, i = \overline{1,4}$ нүктелерінің маңайында шекаралық қабат жоқ. Яғни бірқабатты сингулярлық құбылысы анықталады. Осы құбылысты Сурет 1-ден анық байқауға болады.



Сурет 1. Қызыл және көк сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.005$ мәндерінде (1.29), (1.30) есеп шешімін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (1.31) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.

1.2 Көпқабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы

Бұл бөлімшеде сингулярлы ауытқыған коэффициенттері айнымалы сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпқабатты сингулярлық құбылысы қарастырылады. Шешімнің асимптотикалық жіктелуі құрылады.

1.2.1 Есептің қойылымы.

Келесі сингулярлы ауытқыған дифференциалдық

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_1(t)z(t, \varepsilon) + B_1(t)y(t, \varepsilon) + \mathcal{E}f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t)z(t, \varepsilon) + B_2(t)y(t, \varepsilon) + f_2(t), \end{aligned} \quad (1.32)$$

және

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)z(\theta_i, \varepsilon) + C_2(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon I_1(\theta_i), \\ \Delta y|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon) + I_2(\theta_i), \end{aligned} \quad (1.33)$$

импульстік жүйелерді

$$z(0, \varepsilon) = z^0, y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (1.34)$$

бастапқы шарттарымен қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, z^0 және y^0 – ε кіші парметрiнен тәуелсіз тұрақтылар, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T$, $\theta_i \in (0, T)$ аралығындағы әртүрлі үзіліс моменттері.

Бастапқы берілген (1.32)-(1.34) есеп шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда төмендегі ауытқымаған есеп шешіміне ұмтылады:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1(t)\tilde{z}(t) + B_1(t)\tilde{y}(t), & 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}(\theta_i), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= A_2(t)\tilde{z}(t) + B_2(t)\tilde{y}(t) + f_2(t), & \Delta\tilde{y}|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}(\theta_i) + I_2(\theta_i), \\ \tilde{y}(0) &= y^0. \end{aligned}$$

Келесі шарттар орындалсын:

C1) $A_i(t), B_i(t), f_i(t), I_i(t), i=1,2$, және $C_i(t), i=1,2,3$, функциялары $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде шексіз дифференциалдансын.

C2) $A_1(t) < 0$, $0 \leq t \leq T$ болсын.

C3) $1 + C_3(\theta_i) \neq 0$.

$$C4) \quad \lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{C_1(\theta_i)z(\theta_i, \varepsilon) + C_2(\theta_i)y(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon I_1(\theta_i)}{\varepsilon} = I_i \neq 0,$$

мұндағы $\tilde{y}$ – әрбір $t = \theta_i, i = \overline{1, p}$ импульс моментіндегі $\tilde{y}(\theta_i)$ шешімінің мәні.

1.2.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі

Енді (1.32)-(1.34) есеп шешімінің формальді асимптотикалық жіктелуін келесі түрде іздейміз:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= \tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \quad \theta_i < t \leq \theta_{i+1}, \\ y(t, \varepsilon) &= \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_{p+1} = T, \quad i = \overline{0, p}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t), & \tilde{y}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{y}_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), & \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \quad i = \overline{0, p}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Сондай-ақ (1.36) жіктелудегі $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_k^{(i)}(\tau_i)$ функциялары шекаралық функциялар деп аталады және оларға төмендегідей қосымша шарт қойылады:

$$\omega_k^{(i)}(\infty) = 0, \nu_k^{(i)}(\infty) = 0, i = \overline{0, p}. \quad (1.37)$$

Жоғарыдағы (1.35) жіктелуді (1.32) жүйеге қойсақ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{z}'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) &= A_1(t)(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + B_1(t)(\tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + \\ &+ \mathcal{E}f_1(t), \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) + \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_2(t)(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + B_2(t)(\tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) + f_2(t). \end{aligned}$$

Соңғы теңдеулерден (1.36) жіктелудегі регулярлы және шекаралық қабатты мүшелерді анықтайтын екі типті теңдеулер алынады:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}z'(t, \varepsilon) &= A_1(t)\tilde{z}(t, \varepsilon) + B_1(t)\tilde{y}(t, \varepsilon) + \mathcal{E}f_1(t), \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) &= A_2(t)\tilde{z}(t, \varepsilon) + B_2(t)\tilde{y}(t, \varepsilon) + f_2(t), \end{aligned} \quad (1.38)$$

және

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_1(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon B_1(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \\ \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= A_2(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon B_2(\varepsilon\tau_i + \theta_i)\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Енді $A_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i), B_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i), i = 1, 2$, функцияларын ε дәрежесі бойынша қатарға жіктейік,

$$\begin{aligned} A_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i) &= A_i(\theta_i) + A_i'(\theta_i)\varepsilon\tau_i + A_i''(\theta_i)\frac{(\varepsilon\tau_i)^2}{2!} + \dots, \\ B_i(\varepsilon\tau_i + \theta_i) &= B_i(\theta_i) + B_i'(\theta_i)\varepsilon\tau_i + B_i''(\theta_i)\frac{(\varepsilon\tau_i)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Жоғарыдағы (1.38), (1.39) теңдеулердің екі жағынан ε бірдей дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы, (1.40) асимптотикалық жіктелудің мүшелерін анықтайтын қарапайым дифференциалдық теңдеулер тізбегі алынады

$$\varepsilon^0 : 0 = A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), \quad (1.40)$$

$$\tilde{y}'_0(t) = A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t),$$

$$\varepsilon^1 : \tilde{z}'_0(t) = A_1(t)\tilde{z}_1(t) + B_1(t)\tilde{y}_1(t) + f_1(t),$$

$$\tilde{y}'_1(t) = A_2(t)\tilde{z}_1(t) + B_2(t)\tilde{y}_1(t),$$

$$(1.41)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}'_{k-1}(t) &= A_1(t)\tilde{z}_k(t) + B_1(t)\tilde{y}_k(t), \quad k \geq 2 \\ \tilde{y}'_k(t) &= A_2(t)\tilde{z}_k(t) + B_2(t)\tilde{y}_k(t),\end{aligned}\tag{1.42}$$

және

$$\varepsilon^0 : \dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = A_1(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i),\tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) &= A_2(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i), \\ \varepsilon^k : \dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) - A_1(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) &= \Phi_k(\tau_i), \\ \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) - A_2(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) &= \Psi_k(\tau_i),\end{aligned}\tag{1.44}$$

мұндағы $\Phi_k(\tau_i), \Psi_k(\tau_i)$ функциялары $\omega_j^{(i)}(\tau_i), \nu_j^{(i)}(\tau_i), j < k$ функциялары арқылы рекуррентті түрде өрнектеледі.

Алдымен $t \in [0, \theta_1]$ кесіндісін қарастырайық. Енді алынған теңдеулерден (1.36) жіктелудің элементтерін табу үшін бастапқы шарт қажет. Сол себепті (1.35) қатарды (1.34) бастапқы шартқа қойсақ, онда

$$\begin{aligned}\tilde{z}_0(0) + \varepsilon \tilde{z}_1(0) + \dots + \omega_0^{(0)}(0) + \varepsilon \omega_1^{(0)}(0) + \dots &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) + \varepsilon \tilde{y}_1(0) + \dots + \varepsilon \nu_0^{(0)}(0) + \varepsilon^2 \nu_1^{(0)}(0) + \dots &= y^0,\end{aligned}\tag{1.45}$$

теңдіктерін аламыз.

Содан кейін ε бірдей дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек, келесі бастапқы шарттары алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \tilde{z}_0(0) + \omega_0^{(0)}(0) &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) &= y^0,\end{aligned}\tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}_k(0) + \omega_k^{(0)}(0) &= 0, \\ \tilde{y}_k(0) + \nu_{k-1}^{(0)}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.47}$$

Келесі қадамда асимптотиканың басты регулярлы бөлігі $\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)$ функцияларын анықтайтын

$$\begin{aligned}0 &= A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), \\ \bar{y}'_0(t) &= A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t), \quad \tilde{y}_0(0) = y^0,\end{aligned}$$

есепті алынады және ол ауытқымаған есеппен сәйкес келеді. Кейін $\omega_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясын табу үшін

$$\dot{\omega}_0^{(0)}(\tau_0) = A_1(0)\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(0)}(0) = z^0 - \tilde{z}_0(0)$$

бастапқы шартымен шешеміз. Жоғарыдағы (1.43) формуладағы екінші теңдеуден және (1.37) шарттан

$$\nu_0^{(0)}(0) = \frac{A_2(0)}{A_1(0)}(z^0 - \tilde{z}_0(0)). \quad (1.48)$$

шығады. Онда

$$\dot{\nu}_0^{(0)}(\tau_0) = A_2(0)\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

теңдеуін (1.48) бастапқы шартымен шешу арқылы $\nu_0^{(0)}(\tau_0)$ табуға болады.

Асимптотиканың келесі мүшелерін осы алгоритммен анықтаймыз. Айталық асимптотиканың $k-1$ номерін қоса алғандағы мүшелері табылсын. Онда (1.42)

$$\begin{aligned} \tilde{z}'_{k-1}(t) &= A_1(t)\tilde{z}_k(t) + B_1(t)\tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= A_2(t)\tilde{z}_k(t) + B_2(t)\tilde{y}_k(t), \end{aligned}$$

теңдеуден және

$$\tilde{y}_k(0) = -\nu_{k-1}^{(0)}(0)$$

бастапқы шарттан $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t)$ бірмәнді анықталады. Кейін (1.44) бірінші теңдеуден және (1.47) формуладан $\omega_k^{(0)}(\tau_0)$ функциясын анықтайтын келесі есеп алынады:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k^{(0)}(\tau_0) - A_1(0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) &= \Phi_k(\tau_0), \\ \omega_k^{(0)}(0) &= -\tilde{z}_k(0). \end{aligned}$$

Енді (1.44) формуладағы екінші теңдеуге (1.37) шартты қолдансақ,

$$\nu_k^{(0)}(0) = \frac{A_2(0)}{A_1(0)}\omega_k^{(0)}(0) + \int_0^\infty \left(\frac{A_2(0)}{A_1(0)}\Phi_k(s) - \Psi_k(s) \right) ds. \quad (1.49)$$

бастапқы шарты табылады. Соңғы (1.49) бастапқы шарт арқылы және

$$\dot{\nu}_k^{(0)}(\tau_0) - A_2(0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) = \Psi_k(\tau_0)$$

теңдеуінен $\nu_k^{(0)}(\tau_0)$ табылады.

Осыдан кейін $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = \overline{1, p}$ интервалын қарастырайық. Бұл интервал үшін бастапқы шарт ретінде $\tilde{z}(\theta_i +, \varepsilon)$ және $\tilde{y}(\theta_i +, \varepsilon)$ мәндерін аламыз. Енді (1.35) асимптотикалық жіктелуді (1.33) импульсті теңдеулерге қойсақ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\tilde{z}(\theta_i +, \varepsilon) + \omega^{(i)}(0, \varepsilon) - \tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) - \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) = \\ & = C_1(\theta_i)(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) + \\ & + C_2(\theta_i)(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) + \varepsilon I_1(\theta_i), \\ & \tilde{y}(\theta_i +, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(0, \varepsilon) - \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) - \varepsilon \nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon) = \\ & = C_3(\theta_i)(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) + I_2(\theta_i). \end{aligned}$$

теңдіктерін аламыз және (1.36) формуланы ескеріп, ε кіші параметрінің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек, келесі бастапқы шарттар табылады:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_0(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i), \\ \Delta\tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i) + I_2(\theta_i), \\ \varepsilon^1 : \omega_0^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_1(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) + I_1(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \\ \Delta\tilde{y}_1|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) - \nu_0^{(i)}(0), \\ \varepsilon^k : \omega_k^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + I_{1\varepsilon}^{(k-1)}(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \\ \Delta\tilde{y}_k|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_k(\theta_i) - \nu_{k-1}^{(i)}(0). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Жуықтаудың $\tilde{z}_0(t)$ және $\tilde{y}_0(t)$ мүшелерін анықтау үшін төмендегі есеп алынады:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1(t)\tilde{z}_0(t) + B_1(t)\tilde{y}_0(t), & 0 &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_0(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i), \\ \tilde{y}'_0(t) &= A_2(t)\tilde{z}_0(t) + B_2(t)\tilde{y}_0(t) + f_2(t), & \Delta\tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)\tilde{y}_0(\theta_i) + I_2(\theta_i). \end{aligned}$$

Ал $\omega_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясын табу үшін

$$\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = A_1(\theta_i)\omega_0^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(i)}(0) = C_1(\theta_i)\tilde{z}_1(\theta_i) + C_2(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) + I_1(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_0|_{t=\theta_i},$$

бастапқы шартымен шешеміз, мұндағы $\omega_0^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде түрлендіруге болады. (1.40) формуланың бірінші теңдеуінен және (1.50) теңдеуден

$$\tilde{z}_0(t) = -\frac{B_1(t)}{A_1(t)} \tilde{y}_0(t), \quad \tilde{z}_0(\theta_i) = -\frac{C_2(\theta_i)}{C_1(\theta_i)} \tilde{y}_0(\theta_i),$$

теңдіктері шығады. Бұдан

$$\frac{B_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} = \frac{C_2(\theta_i)}{C_1(\theta_i)}. \quad (1.51)$$

аламыз. Онда (1.41) теңдеуі төмендегідей жазылады:

$$\tilde{z}_1(t) + \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \tilde{y}_1(t) = \frac{1}{A_1(t)} (f_1(t) - \tilde{z}'_0(t)).$$

Нәтижесінде соңғы теңдікті және (1.51) теңдікті қолдансақ, $\omega_0^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде өзгертіп жазуға болады:

$$\omega_0^{(i)}(0) = \frac{C_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} (f_1(\theta_i) - \tilde{z}'_0(\theta_i)) + I_1(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, i = \overline{1, p}.$$

Енді (1.43) теңдеуді τ_i дан ∞ интегралдап және (1.37) қосымша шартты қолдансақ, онда келесі бастапқы шарт

$$\nu_0^{(i)}(0) = \frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)} \omega_0^{(i)}(0), i = \overline{1, p}. \quad (1.52)$$

анықталады. Соңғы (1.42) шарттан және

$$\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) = A_2(\theta_i) \omega_0^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$$

теңдеуінен $\nu_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясы табылады.

Келесі кадамда k – шы жуықтау мүшелері $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t), k \geq 1$ функцияларын анықтау үшін

$$\begin{aligned} \tilde{z}'_{k-1}(t) &= A_1(t) \tilde{z}_k(t) + B_1(t) \tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= A_2(t) \tilde{z}_k(t) + B_2(t) \tilde{y}_k(t), \quad \Delta \tilde{y}_k|_{t=\theta_i} = C_3(\theta_i) \tilde{y}_k(\theta_i, \varepsilon) - \nu_{k-1}^{(i)}(0). \end{aligned}$$

есебі алынады. Ал $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ функциясы төмендегі есептен табылады:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) - A_1(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) &= \Phi_k(\tau_i), i = \overline{1, p}, \\ \omega_k^{(i)}(0) &= C_1(\theta_i)\tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + C_2(\theta_i)\bar{y}_{k+1}(\theta_i) + I_{1\varepsilon}^{(k-1)}(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i},\end{aligned}$$

мұндағы $\omega_k^{(i)}(0)$ бастапқы шартын келесі түрде өзгертіп жазуға болады. (1.42) формуланы келесі түрде жазайық,

$$\tilde{z}_{k+1}(t) + \frac{B_1(t)}{A_1(t)}\tilde{y}_{k+1}(t) = \frac{\tilde{z}'_k(t)}{A_1(t)}.$$

Соңғы теңдеуден және (1.51) теңдіктерін қолданып, $\omega_k^{(i)}(0)$ шартын төмендегідей түрлендіруге болады:

$$\omega_k^{(i)}(0) = \frac{C_1(\theta_i)}{A_1(\theta_i)}\tilde{z}'_k(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, i = \overline{1, p}.$$

Енді (1.44) теңдеуден және (1.37) қосымша шарттан, келесі

$$\nu_k^{(i)}(0) = \frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)}\omega_k^{(i)}(0) + \int_0^\infty \left(\frac{A_2(\theta_i)}{A_1(\theta_i)}\Phi_k(s) - \Psi_k(s)\right)ds, i = \overline{1, p}. \quad (1.53)$$

бастапқы шарты табылады. Онда

$$\dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) - A_2(\theta_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) = \Psi_k(\tau_i), i = \overline{1, p},$$

теңдеуінен және (1.53) бастапқы шартынан $\nu_k^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$ шекаралық функциясы табылады.

Сонымен, жоғарыдағы көрсетілген алгоритм арқылы (1.36) қатардың n номерін қоса алғанға дейінгі коэффициенттерін табуға болады. Сондай-ақ $\tau_i \geq 0$ болғанда $\omega_k^{(i)}(\tau_i), \nu_k^{(i)}(\tau_i), k \geq 0, i = \overline{0, p}$, шекаралық функцияларының келесідей

$$\begin{aligned}|\omega_k^{(i)}(\tau_i)| &\leq K \exp(-\gamma\tau_i), i = \overline{0, p}, \\ |\nu_k^{(i)}(\tau_i)| &\leq K \exp(-\gamma\tau_i), i = \overline{0, p},\end{aligned}$$

экспоненциалды бағалауға ие екенін көрсетуге болады, мұндағы $K > 0, \gamma > 0 - \tau_i$

және ε тәуелсіз тұрақтылар.

1.2.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.

Теорема 1.2 Айталық (C1)–(C4) шарттары орындалсын. Онда кез келген $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ үшін оң тұрақтылар ε_0 және c табылып, (1.32)-(1.34) есебінің $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ шешімі $[0, T]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

мұндағы $Z_n(t, \varepsilon) = Z_n^{(i)}(t, \varepsilon)$, $Y_n(t, \varepsilon) = Y_n^{(i)}(t, \varepsilon)$, $\theta_i < t \leq \theta_{i+1}$, $i = \overline{0, p}$,

$$\begin{aligned} Z_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), \\ Y_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \quad \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \quad i = \overline{0, p}. \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Айталық, шешімнің $Z_n(t, \varepsilon), Y_n(t, \varepsilon)$ дербес қосындысы (1.32)-(1.34) есепті қанағаттандырсын:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dZ_n}{dt} &= A_1(t)Z_n(t, \varepsilon) + B_1(t)Y_n(t, \varepsilon) + \mathcal{E}f_1(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \frac{dY_n}{dt} &= A_2(t)Z_n(t, \varepsilon) + B_2(t)Y_n(t, \varepsilon) + f_2(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \varepsilon \Delta Z_n|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)Z_n(t, \varepsilon) + C_2(\theta_i)Y_n(t, \varepsilon) + \varepsilon I_1(\theta_i) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \Delta Y_n|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)Y_n(t, \varepsilon) + I_2(\theta_i) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ Z_n(0, \varepsilon) &= z^0, \quad Y_n(0, \varepsilon) = y^0 + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned}$$

Бастапқы берілген (1.32)-(1.34) есепке $z(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + Z_n(t, \varepsilon)$ және $y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + Y_n(t, \varepsilon)$ қойсақ, онда келесі теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du}{dt} &= A_1(t)u(t, \varepsilon) + B_1(t)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \frac{dv}{dt} &= A_2(t)u(t, \varepsilon) + B_2(t)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Delta u|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)u(t, \varepsilon) + C_2(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\
\Delta v|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \\
u(0, \varepsilon) &= 0, v(0, \varepsilon) = 0 + O(\varepsilon^{N+1}),
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Енді, (1.54)-(1.55) импульстік жүйені эквивалентті интегралдық теңдіктермен алмастырайық,

$$\begin{aligned}
u(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s, \varepsilon) [B_1(t)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{0 < \theta_i < t} U(t, \theta_i, \varepsilon) \left(1 + \frac{C_1(\theta_i)}{\varepsilon} \right)^{-1} (C_2(\theta_i)v(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})),
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
v(t, \varepsilon) &= \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [A_2(t)u(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\
&+ \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (1 + C_3(\theta_i))^{-1} (O(\varepsilon^{N+1})),
\end{aligned} \tag{1.57}$$

мұндағы $U(t, \theta_i, \varepsilon)$ және $V(t, \theta_i, \varepsilon)$ төмендегі жүйенің фундаменталды матрицасы

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dU}{dt} &= A_1(t)U, t \neq \theta_i, \varepsilon \Delta U|_{t=\theta_i} = C_1(\theta_i)U, U(s, s, \varepsilon) = E, \\
\frac{dV}{dt} &= B_2(t)V, t \neq \theta_i, \Delta V|_{t=\theta_i} = C_3(\theta_i)V, V(s, s, \varepsilon) = E.
\end{aligned}$$

Бұл жүйедегі $U(t, s, \varepsilon)$ функциясы үшін

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}(t-s)\right), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

бағалауы орындалады.

Енді (1.57) теңдеу арқылы анықталған $v(t, \varepsilon)$ функциясын (1.56) өрнегіне қойсақ, онда

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t K(t, s, \varepsilon)u(s, \varepsilon)ds + W_1(t, \varepsilon),$$

аламыз, мұндағы $K(t, s, \varepsilon)$ шенелген өзек, ал $W_1(t, \varepsilon)$ функциясы $W_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Соңғы теңдеуді эквивалентті теңдеумен алмастырсақ,

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t R(t, s, \varepsilon) W_1(s, \varepsilon) ds + W_1(t, \varepsilon) = T_1(t, \varepsilon), \quad (1.58)$$

мұндағы $R(t, s, \varepsilon) - K(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы, $T_1(t, \varepsilon)$ функциясы $T_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Енді $u(t, \varepsilon)$ функциясын өрнектейтін (1.58) формуланы (1.57) теңдеуге қойсақ, онда

$$\begin{aligned} v(t, \varepsilon) &= \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [A_2(t) T_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\ &\quad \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (1 + C_3(\theta_i))^{-1} (O(\varepsilon^{N+1})) = \\ &= T_2(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

мұндағы $T_2(t, \varepsilon)$ функциясы $T_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Онда (1.54), (1.55) есеп шешімі келесі бағалауды қанағаттандырады

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon)\| &= \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \|v(t, \varepsilon)\| &= \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c \varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Нәтижеде теорема дәлелденді.

Мысал

Келесі жүйені

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz}{dt} &= -(t+2)z - (t+1)y - \varepsilon t, & \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= (t+2)z + (t+1)y + 4\varepsilon t, \\ \frac{dy}{dt} &= -(t+2)z - 12y, & \Delta y|_{t=\theta_i} &= 12y - 2z, \end{aligned} \quad (1.59)$$

төмендегідей бастапқы шартпен

$$z(0, \varepsilon) = 3, \quad y(0, \varepsilon) = 2. \quad (1.60)$$

қарастырайық.

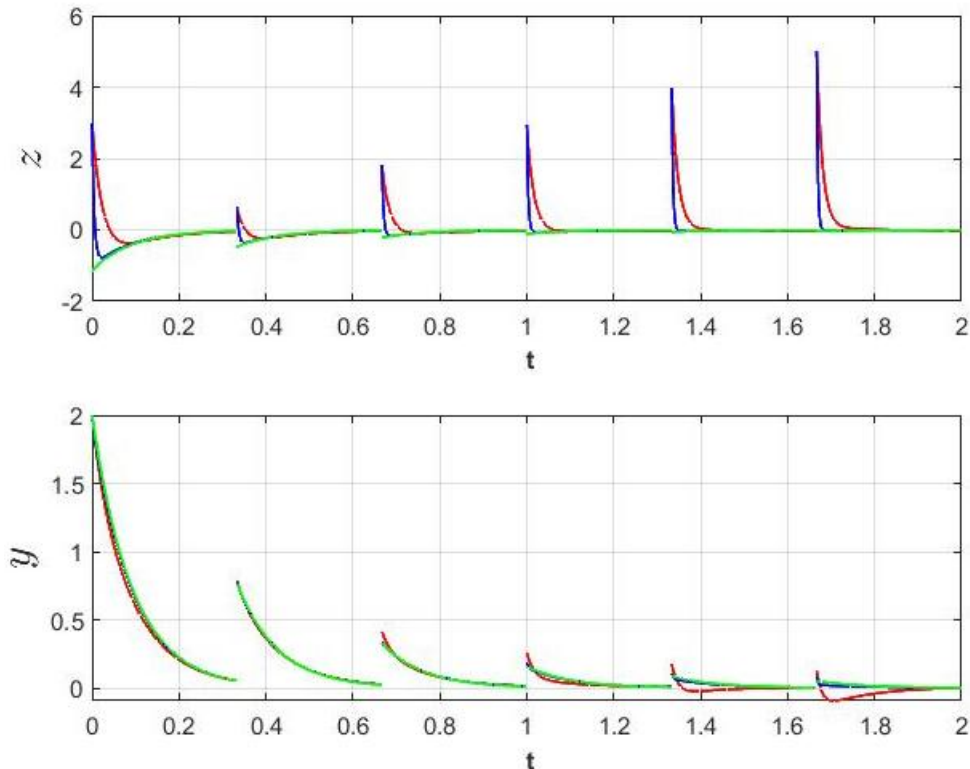
Берілген (1.59), (1.60) есеп шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда келесідей ауытқымаған есеп шешіміне ұмтылады:

$$\begin{aligned} 0 &= -(t+2)\tilde{z} - (t+1)\tilde{y}, & 0 &= (t+2)\tilde{z} + (t+1)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= -(t+2)\tilde{z} - 12\tilde{y}, & \Delta\tilde{y}|_{t=\theta_i} &= 12\tilde{y} - 2\tilde{z}, \\ \tilde{y}(0) &= 2. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Бірінші жолдағы алгебралық теңдеуден $\tilde{z} = \varphi = -\frac{(t+1)}{(t+2)}\tilde{y}$ анықталады. Енді С4) шартын тексерейік,

$$\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi,\tilde{y},0)} \frac{-(t+2)z - (t+1)y + 4\varepsilon t}{\varepsilon} = 4\theta_i \neq 0, \theta_i = \frac{i}{3}, i = \overline{1,4}.$$

Онда (1.59) жүйенің (1.60) бастапқы шарттармен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t = 0$ және $t = \theta_i, i = \overline{1,4}$ нүктелерінің маңайында шекаралық қабатқа ие. Яғни көпқабатты сингулярлық құбылысы пайда болады. Осы құбылыс Сурет 2-тен анық байқалады.



Сурет 2. Қызыл, жасыл және көк сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.01$ мәндерінде (1.59), (1.60) есеп шешімін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (1.61) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.

1.2.4 Импульсті сызықты коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер

Есептің қойылымы.

Келесі сингулярлы ауытқыған біртекті сызықты импульсті теңдеулер жүйесі үшін Коши есебін қарастырайық:

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = az(t, \varepsilon) + by(t, \varepsilon), \quad \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} = z(\theta_i, \varepsilon) + \frac{b}{a} y(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon z(\theta_i, \varepsilon) + 2\varepsilon y(\theta_i, \varepsilon), \quad (1.62)$$

$$\frac{dy}{dt} = cz(t, \varepsilon) + dy(t, \varepsilon), \quad \Delta y|_{t=\theta_i} = z(\theta_i, \varepsilon) + y(\theta_i, \varepsilon),$$

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (1.63)$$

мұндағы ε – оң кіші параметр, $a < 0, b, c, d$ – белгілі тұрақты шамалар, $b \neq 2a, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T, \quad \theta_i, i = 1, 2, \dots, p - (0, T)$

интервалындағы нақты үзіліс моменттері. Сонымен қатар импульсті теңдеу үшін төмендегі шарт орындалсын:

$$\lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{z(\theta_i, \varepsilon) + \frac{b}{a} y(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon z(\theta_i, \varepsilon) + 2\varepsilon y(\theta_i, \varepsilon)}{\varepsilon} = I_i \neq 0, \quad (1.64)$$

мұндағы $\tilde{y}$ - әрбір $t = \theta_i, i = 1, \dots, p$ импульс моментіндегі $\tilde{y}(\theta_i)$ шешімінің мәні. Егер (1.62) жүйедегі $\varepsilon = 0$ болса, онда келесі жүйені аламыз:

$$0 = a\tilde{z}(t) + b\tilde{y}(t), \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = c\tilde{z}(t) + d\tilde{y}(t), \quad (1.65)$$

$$\Delta \tilde{y}|_{t=\theta_i} = \tilde{z}(\theta_i) + \tilde{y}(\theta_i).$$

Соңғы жүйеден түбір $\tilde{z} = \varphi = -\frac{b}{a} \tilde{y}(t)$ тауып, оны (1.65) жүйеге және (1.63) бастапқы шартқа қойсақ, келесі импульсті есепті аламыз:

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{ad - cb}{a} \tilde{y}(t), \quad \Delta \tilde{y}|_{t=\theta_i} = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \tilde{y}(\theta_i) \quad (1.66)$$

$$\tilde{y}(0) = y^0.$$

Осы есепті шешсек, онда

$$\tilde{y}(\theta_i) = y^0 \left(2 - \frac{b}{a}\right)^{i-1} \left(\exp\left(\frac{ad - cb}{a}\right)\right)^{\theta_i} \quad (1.67)$$

және

$$\tilde{z}(\theta_i) = -\frac{by^0}{a} \left(2 - \frac{b}{a}\right)^{i-1} \left(\exp\left(\frac{ad - cb}{a}\right)\right)^{\theta_i} \quad (1.68)$$

шешімдері табылады. Енді (1.64) шартын тексерейік,

$$\begin{aligned} \lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{z(\theta_i, \varepsilon) + \frac{b}{a} y(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon z(\theta_i, \varepsilon) + 2\varepsilon y(\theta_i, \varepsilon)}{\varepsilon} &= \lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \left(2 - \frac{b}{a}\right) \tilde{y}(\theta_i) = \\ &= y^0 \left(2 - \frac{b}{a}\right)^i \left(\exp\left(\frac{ad - cb}{a}\right)\right)^{\theta_i} \neq 0. \end{aligned}$$

Яғни (1.64) шарты орындалады.

Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі

Қарастырылып отырған (1.62)-(1.63) есептің $z(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ шешімінің асимптотикалық жіктелуі келесі түрде ізделінеді:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= \tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

мұндағы,

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t), & \tilde{y}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{y}_k(t), \\ \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), & \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \end{aligned} \quad (1.70)$$

Жоғарыдағы (1.70) жіктелудегі $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_k^{(i)}(\tau_i)$ коэффициенттерді шекаралық қабатты функциялар деп атайды. Оларға төмендегідей қосымша шарт қойылады:

$$\omega_k^{(i)}(\infty) = 0, \nu_k^{(i)}(\infty) = 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (1.71)$$

Шешімнің (1.69) теңдіктегі түрін (1.62) жүйеге қойсақ, t және τ_i аргументтеріне тәуелді теңдеулер жүйесі алынады:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}' &= a\tilde{z} + b\tilde{y}, \\ \tilde{y}' &= c\tilde{z} + d\tilde{y},\end{aligned}\tag{1.72}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= a\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon \cdot b\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \\ \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= c\omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) + \varepsilon \cdot d\nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon).\end{aligned}\tag{1.73}$$

Келесі қадамда (1.72) және (1.73) жүйелердегі барлық функцияларды ε дәрежесі бойынша жіктейміз. Кейін теңдіктің екі жағы ε кіші параметрінің бірдей дәрежесі бойынша теңестіріледі. Нәтижесінде төмендегі теңдеулер жүйесі алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : 0 &= a\tilde{z}_0(t) + b\tilde{y}_0(t), \\ \tilde{y}_0'(t) &= c\tilde{z}_0(t) + d\tilde{y}_0(t),\end{aligned}\tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}_{k-1}'(t) &= a\tilde{z}_k(t) + b\tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}_k'(t) &= c\tilde{z}_k(t) + d\tilde{y}_k(t),\end{aligned}\tag{1.75}$$

және

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) &= a\omega_0^{(i)}(\tau_i), \\ \dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) &= c\omega_0^{(i)}(\tau_i),\end{aligned}\tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) &= a\omega_k^{(i)}(\tau_i) + b\nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i), \\ \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) &= c\omega_k^{(i)}(\tau_i) + d\nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i).\end{aligned}\tag{1.77}$$

Алдымен $t \in [0, \theta_1]$ кесіндісі қарастырылады. Шешімнің асимптотикалық жіктелуіндегі (1.69) мүшелерді анықтау үшін бастапқы шарттар қажет болады. Сол себепті (1.69) қатарды (1.63) бастапқы шартқа қойсақ, онда

$$\begin{aligned}\tilde{z}_0(0) + \varepsilon \tilde{z}_1(0) + \dots + \omega_0^{(0)}(0) + \varepsilon \omega_1^{(0)}(0) + \dots &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) + \varepsilon \tilde{y}_1(0) + \dots + \varepsilon \nu_0^{(0)}(0) + \varepsilon^2 \nu_1^{(0)}(0) + \dots &= y^0.\end{aligned}\tag{1.78}$$

Жоғарыдағы теңдіктің екі жағын ε бірдей дәрежелері бойынша теңестірсек, онда

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \tilde{z}_0(0) + \omega_0^{(0)}(0) &= z^0, \\ \tilde{y}_0(0) &= y^0,\end{aligned}\tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}_k(0) + \omega_k^{(0)}(0) &= 0, \\ \tilde{y}_k(0) + \nu_{k-1}^{(0)}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.80}$$

Енді нөлдік жуықтауды $\tilde{z}_0(t)$ және $\tilde{y}_0(t)$ анықтау үшін келесідей есеп алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : 0 &= a\tilde{z}_0(t) + b\tilde{y}_0(t), \\ \tilde{y}_0'(t) &= c\tilde{z}_0(t) + d\tilde{y}_0(t), \quad \tilde{y}_0(0) = y^0.\end{aligned}$$

Ал $\omega_0^{(0)}(\tau_0)$ шекаралық қабатты функциясын анықтау үшін

$$\dot{\omega}_0^{(0)}(\tau_0) = a\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(0)}(0) = z^0 - \tilde{z}_0(0)$$

бастапқы шартымен шешу қажет. Мұнан кейін, (1.76) формуладағы екінші теңдеуден және (1.71) қосымша шарттан келесі бастапқы шарт табылады:

$$\nu_0^{(0)}(0) = \frac{c}{a}(z^0 - \tilde{z}_0(0))\tag{1.81}$$

Енді төмендегі теңдеу

$$\dot{\nu}_0^{(0)}(\tau_0) = c\omega_0^{(0)}(\tau_0)$$

табылған (1.81) бастапқы шартпен шешіледі. Нәтижесінде $\nu_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясы табылады.

Келесі қадамда $\varepsilon^k (k \geq 1)$ дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін табу үшін төмендегі есеп алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}_{k-1}'(t) &= a\tilde{z}_k(t) + b\tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}_k'(t) &= c\tilde{z}_k(t) + d\tilde{y}_k(t), \quad \tilde{y}_k(0) = -\nu_{k-1}^{(0)}(0).\end{aligned}$$

Келесіде (1.77) формуладағы бірінші теңдеумен

$$\dot{\omega}_k^{(0)}(\tau_0) = a\omega_k^{(0)}(\tau_0) + b\nu_{k-1}^{(0)}(\tau_0)$$

және

$$\omega_k^{(0)}(0) = -\tilde{z}_k(0), \quad (1.82)$$

бастапқы шарты арқылы $\omega_k^{(0)}(\tau_0)$ функциясы табылады. Мұнан кейін, (1.77) формуладағы екінші теңдеу және (1.71) шарт арқылы келесі бастапқы шарт анықталады:

$$\nu_k^{(0)}(0) = \frac{c}{a} \omega_k^{(0)}(0) + \frac{bc - ad}{a} \int_0^\infty \nu_{k-1}^{(0)}(s) ds, \quad (1.83)$$

мұндағы $\omega_k^{(0)}(0)$ бастапқы шарты (1.82) формула арқылы өрнектеледі. Жоғарыдағы табылған (1.83) бастапқы шарттан және келесі теңдеуден

$$\dot{\nu}_k^{(0)}(\tau_0) = c\omega_k^{(0)}(\tau_0) + d\nu_{k-1}^{(0)}(\tau_0),$$

$\nu_k^{(0)}(\tau_0)$ шекралық функциясы табылады.

Енді келесі $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots, p$, интервалын қарастырайық. Осы интервал үшін бастапқы мән ретінде $\bar{z}(\theta_i +, \varepsilon)$ және $\tilde{y}(\theta_i +, \varepsilon)$ алынады. Шешімнің (1.69) қатар түріндегі формасын (1.62) импульсті теңдеулерге қойсақ, онда төмендегі теңдіктерді аламыз:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\bar{z}(\theta_i +, \varepsilon) + \omega^{(i)}(0, \varepsilon) - \bar{z}(\theta_i, \varepsilon) - \omega^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right) &= \bar{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \\ &+ \frac{b}{a} \left(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right) + \varepsilon \left(\bar{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right) + \\ &+ 2\varepsilon \left(\tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right), \\ \tilde{y}(\theta_i +, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(0, \varepsilon) - \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) - \varepsilon \nu^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) &= \\ = \bar{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) + \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Осыдан кейін ε дәрежесі бойынша теңестірсек, келесі теңдеулер алынады:

$$\varepsilon^0 : 0 = \tilde{z}_0(\theta_i) + \frac{b}{a} \tilde{y}_0(\theta_i), \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : \omega_0^{(i)}(0) &= \tilde{z}_1(\theta_i) + \frac{b}{a} \tilde{y}_1(\theta_i) + \tilde{z}_0(\theta_i) + 2\tilde{y}_0(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \\ \Delta \tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= \tilde{z}_0(\theta_i) + \tilde{y}_0(\theta_i),\end{aligned}\quad (1.85)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \omega_k^{(i)}(0) &= \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + \frac{b}{a} \tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + \tilde{z}_k(\theta_i) + 2\tilde{y}_k(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \\ \Delta \tilde{y}_k|_{t=\theta_i} &= \tilde{z}_k(\theta_i) + \tilde{y}_k(\theta_i) - \nu_{k-1}^{(i)}(0).\end{aligned}\quad (1.86)$$

Енді нөлдік жуықтауды $\tilde{z}_0(t)$ and $\tilde{y}_0(t)$ анықтау үшін төмендегі жүйе алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : 0 &= a\tilde{z}_0(t) + b\tilde{y}_0(t), \\ \tilde{y}_0'(t) &= c\tilde{z}_0(t) + d\tilde{y}_0(t), \quad \Delta \tilde{y}_0|_{t=\theta_i} = \tilde{z}_0(\theta_i) + \tilde{y}_0(\theta_i).\end{aligned}$$

Келесіде $\omega_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясын табамыз. Ол үшін

$$\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = a\omega_0^{(i)}(\tau_i)$$

теңдеуін

$$\omega_0^{(i)}(0) = \tilde{z}_1(\theta_i) + \frac{b}{a} \tilde{y}_1(\theta_i) + \tilde{z}_0(\theta_i) + 2\tilde{y}_0(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \quad (1.87)$$

бастапқы шартымен шешу керек, мұндағы $\frac{1}{a} \tilde{z}_0'(\theta_i) = \tilde{z}_1(\theta_i) + \frac{b}{a} \tilde{y}_1(\theta_i)$. Онда (1.87) бастапқы шартын келесідей түрлендіруге болады:

$$\omega_0^{(i)}(0) = \frac{1}{a} \tilde{z}_0'(\theta_i) + \tilde{z}_0(\theta_i) + 2\tilde{y}_0(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i},$$

Енді $\nu_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясын анықтау керек. Алдымен (1.76) формуладағы екінші теңдеуден және (1.71) қосымша шарттан төмендегі бастапқы шартты табамыз:

$$\nu_0^{(i)}(0) = \frac{c}{a} \omega_0^{(i)}(0), \quad (1.88)$$

мұндағы $\omega_0^{(i)}(0)$ (1.87) формула арқылы өрнектеледі. Нәтижесінде

$$\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) = c\omega_0^{(i)}(\tau_i)$$

теңдеуі (1.88) бастапқы шартпен шешіледі.

Келесі қадамда, $\varepsilon^k (k \geq 1)$ алдындағы коэффициентін анықтау үшін төмендегі жүйе алынады:

$$\begin{aligned}\varepsilon^k : \tilde{z}'_{k-1}(t) &= a\tilde{z}_k(t) + b\tilde{y}_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= c\tilde{z}_k(t) + d\tilde{y}_k(t), \Delta\tilde{y}_k|_{t=\theta_i} = \tilde{z}_k(\theta_i) + \tilde{y}_k(\theta_i) - \nu_{k-1}^{(i)}(0).\end{aligned}$$

Нәтижесінде $\tilde{z}_k(t), \tilde{y}_k(t)$ функциялары табылады. Енді (1.77) формуладағы бірінші теңдеу

$$\dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) = a\omega_k^{(i)}(\tau_i) + b\nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i)$$

және

$$\omega_k^{(i)}(0) = \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + \frac{b}{a}\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + \tilde{z}_k(\theta_i) + 2\tilde{y}_k(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \quad (1.89)$$

бастапқы шарты арқылы $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ шекаралық функциясы анықталады, мұндағы $\frac{1}{a}\tilde{z}'_k(\theta_i) = \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + \frac{b}{a}\tilde{y}_{k+1}(\theta_i)$. Онда (1.89) бастапқы шартын келесідей түрлендіруге болады:

$$\omega_k^{(i)}(0) = \frac{1}{a}\tilde{z}'_k(\theta_i) + \tilde{z}_k(\theta_i) + 2\tilde{y}_k(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}.$$

Кейін (1.77) формуладағы екінші теңдеу және (1.71) арқылы келесі бастапқы шарт табылады:

$$\nu_k^{(i)}(0) = \frac{c}{a}\omega_k^{(i)}(0) + \frac{bc-ad}{a} \int_0^\infty \nu_{k-1}^{(i)}(s)ds, \quad (1.90)$$

мұндағы $\omega_k^{(i)}(0)$ (1.89) теңдік арқылы өрнектеледі. Соңында төмендегі теңдеуді

$$\dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) = c\omega_k^{(i)}(\tau_i) + d\nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i),$$

(1.90) бастапқы шарты арқылы шешсек, онда $\nu_k^{(i)}(\tau_i)$ функциясы табылады. Осылайша жоғарыдағы алгоритм бойынша (1.66) қатардың $\tilde{z}_k(t), \tilde{y}_k(t), \omega_k^{(i)}(\tau_i), \nu_k^{(i)}(\tau_i), i = \overline{1, p}$ мүшелерін $k = n$ дәлдікке дейін табуға болады.

Шешімнің асимптотикасының негіздемесі

Теорема 1.3 Айталық есеп қойылымындағы шарттар және (1.64) шарты орындалсын. Онда кез келген $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ үшін оң тұрақтылар ε_0 және c табылып, (1.62), (1.63) есебінің $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ шешімі $[0, T]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1.91)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} Z_n(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), \\ Y_n(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Дәлелдеуі. Айталық, шешімнің $Z_n(t, \varepsilon), Y_n(t, \varepsilon)$ дербес қосындысы (1.62), (1.63) есепті қанағаттандырсын:

$$\varepsilon \frac{dZ_n}{dt} = aZ_n + bY_n + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \Delta Z_n|_{t=\theta_i} = Z_n + \frac{b}{a} Y_n + \varepsilon Z_n + 2\varepsilon Y_n + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.93)$$

$$\frac{dY_n}{dt} = cZ_n + dY_n + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \Delta Y_n|_{t=\theta_i} = Z_n + Y_n + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$Z_n(0, \varepsilon) = z^0, \quad Y_n(0, \varepsilon) = y^0 + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.94)$$

Бастапқы берілген (1.62), (1.63) есептегі шешімдерді $z(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + Z_n(t, \varepsilon)$ және $y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + Y_n(t, \varepsilon)$ арқылы алмастырсақ, онда келесі есепті аламыз:

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = au + bv + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \Delta u|_{t=\theta_i} = u + \frac{b}{a} v + \varepsilon u + 2\varepsilon v + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.95)$$

$$\frac{dv}{dt} = cu + dv + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \Delta v|_{t=\theta_i} = u + v + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad v(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad (1.96)$$

Енді, (1.95), (1.96) импульсті жүйені эквивалентті интегралдық теңдеулермен алмастырайық:

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s, \varepsilon) [b v + O(\varepsilon^{N+1})] ds +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon + 1} \sum_{0 < \theta_i < t} U(t, \theta_i, \varepsilon) \left(\frac{b}{a} v + 2\varepsilon v + O(\varepsilon^{N+1}) \right), \quad (1.97)$$

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [c u + O(\varepsilon^{N+1})] ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (u + O(\varepsilon^{N+1})), \quad (1.98)$$

мұндағы $U(t, \theta_i, \varepsilon)$ және $V(t, \theta_i, \varepsilon)$ төмендегі жүйенің фундаменталды матрицасы:

$$\varepsilon \frac{dU}{dt} = aU, \quad \varepsilon \Delta U|_{t=\theta_i} = (1 + \varepsilon)U, \quad U(s, s, \varepsilon) = 1,$$

$$\frac{dV}{dt} = dV, \quad \Delta V|_{t=\theta_i} = V, \quad V(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Бұл жүйедегі $U(t, s, \varepsilon)$ функциясы үшін

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}(t-s)\right), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

бағалауы орындалады. Енді (1.98) теңдік арқылы анықталған $v(t, \varepsilon)$ функциясын (1.97) өрнекке қойсақ, онда

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t K(t, s, \varepsilon) u(s, \varepsilon) ds + W_1(t, \varepsilon),$$

мұндағы $K(t, s, \varepsilon)$ шенелген өзек, ал $W_1(t, \varepsilon)$ функциясы $W_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Соңғы теңдеуді эквивалентті теңдеумен алмастырсاق,

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t R(t, s, \varepsilon) W_1(s, \varepsilon) ds + W_1(t, \varepsilon) = T_1(t, \varepsilon), \quad (1.99)$$

мұндағы $R(t, s, \varepsilon) - K(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы. Енді $u(t, \varepsilon)$ функциясын өрнектейтін (1.99) формуланы (1.97) теңдеуге қойсақ, онда

$$\begin{aligned}
v(t, \varepsilon) &= \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [cT_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})] ds + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (T_1(\theta_i, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1})) = T_2(t, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.100}$$

мұндағы $T_2(t, \varepsilon)$ функциясы $T_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ бағалауына ие. Онда (1.95), (1.96) есеп шешімі келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}
\|u(t, \varepsilon)\| &= \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\
\|v(t, \varepsilon)\| &= \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Нәтижеде теорема дәлелденді.

1.2.5 Мысал

Сингулярлы ауытқыған сызықты импульстік жүйені

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dz}{dt} &= -4z + 3y, \quad \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} = z - \frac{3}{4}y + \varepsilon z + 2\varepsilon y, \\
\frac{dy}{dt} &= y - 3z, \quad \Delta y|_{t=\theta_i} = z + y,
\end{aligned} \tag{1.101}$$

төмендегі бастапқы шарттармен қарастырайық

$$z(0, \varepsilon) = 1, \quad y(0, \varepsilon) = 2, \tag{1.102}$$

мұндағы $a = -4 < 0, \theta_i = i, i = 1, 2, 3$. Енді осы есептен $\varepsilon = 0$ деп алайық. Онда бірінші теңдеу келесі түрге келеді:

$$-4\tilde{z} + 3\tilde{y} = 0.$$

Осы жерден $\tilde{z} = \varphi = \frac{3}{4}\tilde{y}$ түбірін тауып, (1.101) жүйеге және (1.102) бастапқы шартқа қойсақ төмендегі есепті аламыз:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}' &= -\frac{5}{4}\tilde{y}, \quad \Delta\tilde{y}|_{t=\theta_i} = \frac{7}{4}\tilde{y}, \\
\tilde{y}(0) &= 2.
\end{aligned}$$

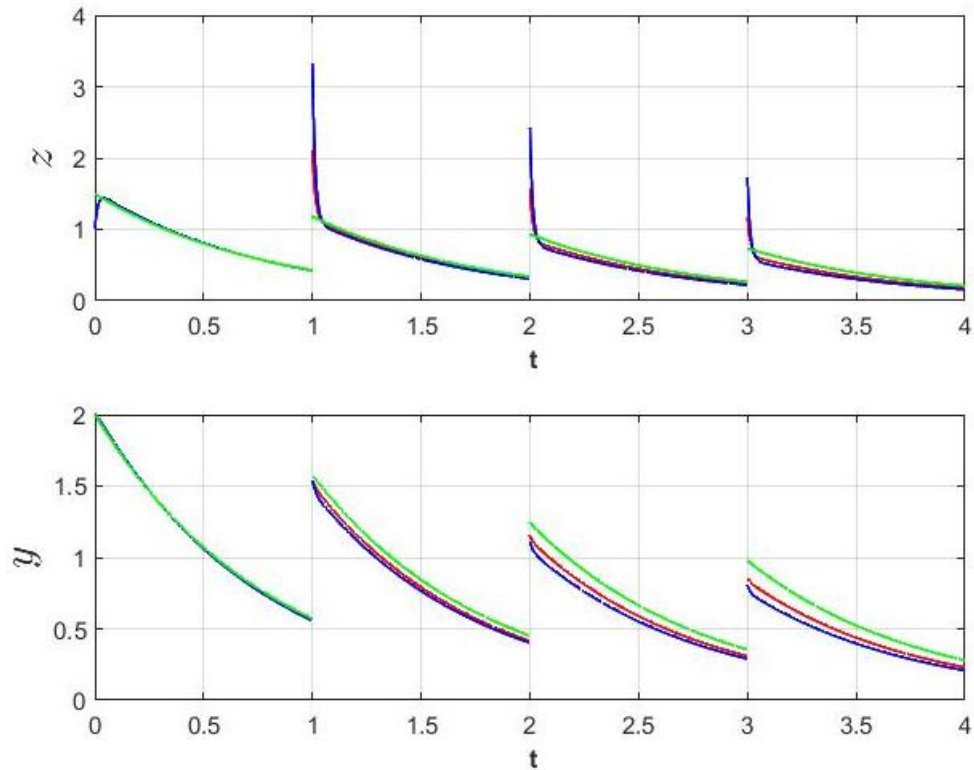
Келесі қадамда (1.67) және (1.68) формулаларды қолдансақ,
 $\tilde{y}(\theta_i) = 2\left(\frac{11}{4}\right)^{i-1} \left(\exp\left(-\frac{5}{4}\right)\right)^{\theta_i}$ және $\tilde{z}(\theta_i) = \frac{3}{2}\left(\frac{11}{4}\right)^{i-1} \left(\exp\left(-\frac{5}{4}\right)\right)^{\theta_i}$ шешімдері
табылады. Енді орнықтылық шартын тексерейік, онда

$$\frac{\partial}{\partial z}(-4z + 3y) = -4 < 0.$$

Осы себепті $\tilde{z} = \varphi = \frac{3}{4}\tilde{y}$ түбірі бірқалыпты асимптотикалық орнықты. Келесіде
(1.64) шартын тексерсек, онда

$$\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{z - \frac{3}{4}y + \varepsilon z + 2\varepsilon y}{\varepsilon} = \frac{11}{4}\tilde{y}(\theta_i) = 2\left(\frac{11}{4}\right)^i \left(\exp\left(-\frac{5}{4}\right)\right)^{\theta_i} \neq 0.$$

Яғни (1.64) шарты орындалады. Осы мысалдың асимптотикалық жіктелу мүшелерін жоғарыда көрсетілген алгоритм арқылы табуға болады. Сондай-ақ (1.101) және (1.102) есептің $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t=0$ және $t=\theta_i +$, $i=1,2,3$ нүктелерінің маңында көпқабатты шекаралық құбылысқа ие. Осы құбылысты Сурет 3-ден анық көруге болады.



Сурет 3: Қызыл, көк және жасыл сызықтар (1.101), (1.102) есептің кіші параметрдің сәйкесінше $\varepsilon : 0.05, 0.005$ әртүрлі мәндеріндегі шешімін көрсетеді.

2 СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИМПУЛЬСТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл бөлімде сингулярлы ауытқыған сызықты емес импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылады. Мұндағы жүйенің импульсті бөлігіде сингулярлы ауытқыған. Шекаралық функциялар әдісін қолданып, шешімнің асимптотикалық жуықтауын құру алгоритмі көрсетіледі.

2.1 Есептің қойылымы

Сингулярлық ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулерді

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz}{dt} &= F(z(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} = I_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= f(z(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)), \quad \Delta y|_{t=\theta_i} = J_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

төмендегі бастапқы шартпен қарастырайық:

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (2.2)$$

мұндағы ε – оң кіші параметр, z, F және I_i – m өлшемді функциялар, y, f және J_i – n өлшемді функциялар, z^0 және y^0 – ε -нен тәуелсіз болсын, $\theta_{i=1}^p, 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T - (0, T)$ интервалындағы үзіліс моменттері. Ал $\Delta x|_{t=\theta_i} = x(\theta_i+) - x(\theta_i)$, мұндағы $x(\theta_i-) = x(\theta_i)$ және $x(\theta_i+) = \lim_{t \rightarrow \theta_i+} x(t)$ болсын.

Енді (2.1) жүйеден $\varepsilon = 0$ деп алайық, онда келесі түрдегі теңдеуді аламыз:

$$\begin{aligned} 0 &= F(\tilde{z}(t), \tilde{y}(t), 0), \quad 0 = I_i(\tilde{z}(\theta_i), \tilde{y}(\theta_i), 0), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= f(\tilde{z}(t), \tilde{y}(t)), \quad \Delta \tilde{y}|_{t=\theta_i} = J_i(\tilde{z}(\theta_i), \tilde{y}(\theta_i)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Бұл жүйені туындалған жүйе деп атайды, себебі оның реті (2.1) жүйенің ретіне қарағанда кіші. Сондықтан (2.3) жүйенің бастапқы шарттар саны (2.1) жүйе бастапқы шарттар санынан аз болады. Байқағанымыздай (2.3) жүйеден $\tilde{y}$ үшін бастапқы шарты қалатыны айқын көрініп тұр

$$\tilde{y}(0) = y^0, \quad (2.4)$$

Ал $\tilde{z}$ үшін бастапқы шарт алынып тасталынады. Жоғарыдағы (2.3) жүйені шешу үшін $0 = F(\tilde{z}, \tilde{y}, 0)$ және $0 = I_i(\tilde{z}, \tilde{y}, 0)$ алгебралық теңдеулерінен $\tilde{z}$ -ті табу керек. Кейін $0 = F(\varphi(\tilde{y}(t), t), \tilde{y}, 0)$ және $0 = I_i(\varphi(\tilde{y}(t), t), \tilde{y}, 0)$ теңдеулерін қанағаттандыратын бір $\tilde{z} = \varphi(\tilde{y}(t), t)$ түбірі таңдалады. Осы $\tilde{z} = \varphi(\tilde{y}(t), t)$ түбірін (2.3) жүйеге және (2.4) бастапқы шартқа қойсақ, онда келесі есепті аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{dt} &= f(\varphi(\tilde{y}(t), t), \tilde{y}(t)), \quad \Delta\tilde{y}|_{t=\theta_i} = J_i(\varphi(\tilde{y}(\theta_i), \theta_i), \tilde{y}(\theta_i)), \\ \tilde{y}(0) &= y^0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Келесі шарттар орындалсын:

(C1) Айталық $f(z, y)$ және $J_i(z, y)$ функциялары $H = \{(y, t) \in \bar{N} = \{0 \leq t \leq T, \|y\| \leq c\}, \|z\| \leq d\}$ облысында шексіз дифференциалдансын, ал $F(z, y, \varepsilon)$ және $I_i(z, y, \varepsilon)$ функциялары $H \times [0, 1]$ облысында шексіз дифференциалдансын;

(C2) $F(z, y, 0) = 0$ және $I_i(z, y, 0) = 0$ алгебралық теңдеулерінің $\bar{N}$ облысында $z = \varphi(y, t)$ түбірі бар болсын және бұл түбір келесі шарттарды қанағаттандырсын:

- 1) $\varphi(y, t)$ функциясы $\bar{N}$ облысында үзіліссіз,
- 2) $(\varphi(y, t), y, t) \in H, (y, t) \in \bar{N}$,
- 3) $\varphi(y, t)$ түбірі $\bar{N}$ облысында оқшауланған, яғни $\exists \delta > 0 : F(z, y, 0) \neq 0$ және $I_i(z, y, 0) \neq 0, 0 < \|z - \varphi(y, t)\| < \delta, (y, t) \in \bar{N}$;

(C3) Жоғарыдағы (2.5) жүйенің $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде жалғыз $\tilde{y}(t)$ шешімі бар болсын және $0 \leq t \leq T$ кесіндісі үшін $(\tilde{y}, t) \in \bar{N}$. Енді $x = z - \varphi$ және $t = \tau\varepsilon$ деп алсақ, онда

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x + \varphi(y, t), y, 0), \tau \geq 0, \quad (2.6)$$

мұндағы y және t параметр ретінде қарастырылады, $x = 0$ (2.6) жүйенің $(y, t) \in \bar{N}$ облысындағы оқшауланған түбірі.

(C4) H облысында (2.6) жүйеге сәйкес τ бойынша туындысы теріс анықталған, ал өзі оң анықталған $V(x, y, \tau)$ функциясы бар болсын.

Келесі түйіндес есепті қарастырайық:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = F(\omega, y^0, 0), \tau \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\omega(0) = z^0. \quad (2.8)$$

Жалпы жағдайда z^0 бастапқы мәні $\varphi(y^0, 0)$ тыныштық нүктеден алыс жатуы мүмкін. Бұл жағдайда (2.7) және (2.8) есептің $\omega(\tau)$ шешімі $\tau \rightarrow \infty$ кезінде $\varphi(y^0, 0)$ тыныштық нүктесіне ұмтылмайды.

Айталық, (2.7) және (2.8) есептің $\omega(\tau)$ шешімі келесі шартты қанағаттандырсын:

(C5) $\tau \rightarrow \infty$ кезінде $\omega(\tau) \rightarrow \varphi(y^0, 0)$ ұмтылсын және $(\omega(\tau), y^0, 0)$ $\tau \geq 0$ болғанда H облысына тиісті болсын.

Бұл жағдайда, z^0 бастапқы мәні $\omega = \varphi(y^0, 0)$ тыныштық нүктесінің тартылыс аймағында жатады. Осы нүктенің асимптотикалық орнықтылығына байланысты, оған жақын барлық нүктелер оның тартылыс аймағында жатады.

Сонымен қатар, кіші параметр ε нөлге ұмтылғанда импульстік функцияның шексіздікке кетуін болдырмау үшін төмендегідей шарт қойылады:

$$(C6) \quad \lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{I_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon), \varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

мұндағы $\tilde{y}$ -әрбір $t = \theta_i, i = 1, 2, \dots, p$, импульс моментіндегі $\tilde{y}(\theta_i)$ шешімінің мәні.

2.2 Шешімнің асимптотикалық жіктелуін құру алгоритмі

Сонымен (2.1)-(2.2) есеп шешімінің $z(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ асимптотикалық жіктелуі келесі түрде ізделінеді:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= \tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ y(t, \varepsilon) &= \tilde{z}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \quad \theta_i < t \leq \theta_{i+1}, \quad \theta_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t), & \bar{y}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t), \\ \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), & \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Жоғарыдағы (2.10) жіктелудің $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_k^{(i)}(\tau_i)$ коэффициенттерін шекаралық функциялар деп атайды және оларға төмендегідей қосымша шарт қойылады:

$$\omega_k^{(i)}(\infty) = 0, \nu_k^{(i)}(\infty) = 0, i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.11)$$

Енді (2.9) қатарды (2.1) қойсақ, келесі теңдіктер алынады:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\tilde{z}'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) \right) &= F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon) + \\ &+ \left[F(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \varepsilon) - F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon) \right] \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) + \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)) + \\ &+ \left[f(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) - f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)) \right] \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктерді t және τ_i аргументтері бойынша бөлсек, онда

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} z'(t, \varepsilon) &= F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \tilde{y}'(t, \varepsilon) &= f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

және

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= F(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \varepsilon) - \\ &- F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \dot{\nu}^{(i)}(\tau_i, \varepsilon) &= f(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) - \\ &- f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

теңдеулер жүйесі алынады. Енді F, f, I, J функцияларын ε кіші параметрінің дәрежесі бойынша жіктейік,

$$\begin{aligned} F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon) &= F(\tilde{z}_0(t) + \tilde{\varepsilon} z_1(t) + \dots, \tilde{y}_0(t) + \tilde{\varepsilon} y_1(t) + \dots, \varepsilon) = \\ &= F(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), 0) + \varepsilon [F_z(t) \tilde{z}_1(t) + F_y(t) \tilde{y}_1(t) + F_\varepsilon(t)] + \dots + \\ &+ \varepsilon^k [F_z(t) \tilde{z}_k(t) + F_y(t) \tilde{y}_k(t) + F_k(t)] + \dots = \tilde{F}_0(t) + \varepsilon \tilde{F}_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{F}_k(t) + \dots, \end{aligned}$$

мұндағы $F_z(t), F_y(t)$ және $F_\varepsilon(t)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), 0)$ нүктесінде есептеледі, ал $F_k(t)$ рекуррентті түрде $\tilde{z}_j(t)$ және $\tilde{y}_j(t)$, $j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі.

$$\begin{aligned} F(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \varepsilon) - F(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon), \varepsilon) &= \\ &= F(\tilde{z}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon} z_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots + \omega_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon \omega_1^{(i)}(\tau_i) + \dots, \\ &\tilde{y}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon} y_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots + \varepsilon \nu_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon^2 \nu_1^{(i)}(\tau_i) + \dots, \varepsilon) - \\ &- F(\tilde{z}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon} z_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots, \tilde{y}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon} y_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots, \varepsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) - F(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) + \\
&\quad + \varepsilon [F_z(\tau_i) \omega_1^{(i)}(\tau_i) + F_y(\tau_i) \nu_0^{(i)}(\tau_i) + G_1(\tau_i)] + \dots + \\
&\quad + \varepsilon^k [F_z(\tau_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) + F_y(\tau_i) \nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + G_k(\tau_i)] + \dots = \\
&= \Pi_0 F(\tau_i) + \varepsilon \Pi_1 F(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k F(\tau_i) + \dots,
\end{aligned}$$

мұндағы $F_z(\tau_i)$ және $F_y(\tau_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)$, $i = 1, 2, \dots, p$ нүктесінде есептеледі, ал $F_z(\theta_i)$ және $F_y(\theta_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)$ нүктесінде есептеледі, $G_k(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, рекурентті түрде $\omega_j^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_{j-1}^{(i)}(\tau_i)$, $j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі. $f(z, y)$ үшін осындай жіктелу орындалады.

$$\begin{aligned}
f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)) &= f(\tilde{z}_0(t) + \tilde{\varepsilon}_1(t) + \dots, \tilde{y}_0(t) + \tilde{\varepsilon}_1(t) + \dots) = \\
&= f(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)) + \varepsilon [f_z(t) \tilde{z}_1(t) + f_y(t) \tilde{y}_1(t)] + \dots + \\
&+ \varepsilon^k [f_z(t) \tilde{z}_k(t) + f_y(t) \tilde{y}_k(t) + f_k(t)] + \dots = \tilde{f}_0(t) + \tilde{\varepsilon}_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{f}_k(t) + \dots,
\end{aligned}$$

мұндағы $f_z(t)$ және $f_y(t)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t))$ нүктесінде есептеледі, ал $f_k(t)$ рекурентті түрде $\tilde{z}_j(t)$ және $\tilde{y}_j(t)$, $j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі.

$$\begin{aligned}
&f(\tilde{z}(t, \varepsilon) + \omega^{(i)}(\tau_i, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i)}(\tau_i, \varepsilon)) - f(\tilde{z}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon)) = \\
&= f(\tilde{z}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon}_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots + \omega_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon \omega_1^{(i)}(\tau_i) + \dots, \\
&\quad \tilde{y}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon}_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots + \varepsilon \nu_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon^2 \nu_1^{(i)}(\tau_i) + \dots) - \\
&- f(\tilde{z}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon}_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots, \tilde{y}_0(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \tilde{\varepsilon}_1(\theta_i + \varepsilon \tau_i) + \dots) = \\
&= f(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) - f(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) + \\
&\quad + \varepsilon [f_z(\tau_i) \omega_1^{(i)}(\tau_i) + f_y(\tau_i) \nu_0^{(i)}(\tau_i)] + \dots + \\
&\quad + \varepsilon^k [f_z(\tau_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) + f_y(\tau_i) \nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + G_k(\tau_i)] + \dots = \\
&= \Pi_0 f(\tau_i) + \varepsilon \Pi_1 f(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k f(\tau_i) + \dots,
\end{aligned}$$

мұндағы $f_z(\tau_i)$ және $f_y(\tau_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i))$, $i = 1, 2, \dots, p$ нүктесінде есептеледі, ал $f_z(\theta_i)$ және $f_y(\theta_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i))$ нүктесінде есептеледі, $G_k(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, рекурентті түрде $\omega_j^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_{j-1}^{(i)}(\tau_i)$, $j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі. Тура осылай келесі теңдіктер алынады:

$$\begin{aligned}
I_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon), \varepsilon) &= I_i(z(\theta_i-, \varepsilon), y(\theta_i-, \varepsilon), \varepsilon) = \\
&= I_i(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon), \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon), \varepsilon) = \\
&= I_i(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon), \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon), \varepsilon) = I_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) + \\
&+ \varepsilon [I_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_1(\theta_i) + I_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_1(\theta_i) + I_{i\varepsilon}(\theta_i)] + \dots + \\
&+ \varepsilon^k [I_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_k(t) + I_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_k(\theta_i) + I_{ik}(\theta_i)] + \dots = \\
&= \tilde{I}_{i0}(\theta_i) + \varepsilon \tilde{I}_{i1}(\theta_i) + \dots + \varepsilon^k \tilde{I}_{ik}(\theta_i) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

мұндағы $I_{iz}(\theta_i), I_{iy}(\theta_i)$ және $I_{i\varepsilon}(\theta_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)$, $i = 1, 2, \dots, p$, нүктесінде есептеледі, ал $I_{ik}(\theta_i)$ рекуррентті түрде $\tilde{z}_j(\theta_i)$ және $\tilde{y}_j(\theta_i), j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі. $J_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon))$ үшін осындай жіктелу орындалады.

$$\begin{aligned}
J_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon)) &= J_i(z(\theta_i-, \varepsilon), y(\theta_i-, \varepsilon)) = \\
&= J_i(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon) + \omega^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon), \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon) + \varepsilon \nu^{(i-1)}(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon}, \varepsilon)) = \\
&= J_i(\tilde{z}(\theta_i, \varepsilon), \tilde{y}(\theta_i, \varepsilon)) = J_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) + \\
&+ \varepsilon [J_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_1(\theta_i) + J_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_1(\theta_i)] + \dots + \\
&+ \varepsilon^k [J_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_k(t) + J_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_k(\theta_i) + J_{ik}(\theta_i)] + \dots = \\
&= \tilde{J}_{i0}(\theta_i) + \varepsilon \tilde{J}_{i1}(\theta_i) + \dots + \varepsilon^k \tilde{J}_{ik}(\theta_i) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

мұндағы $J_{iz}(\theta_i)$ және $J_{iy}(\theta_i)$ матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i))$, $i = 1, 2, \dots, p$, нүктесінде есептеледі, ал $J_{ik}(\theta_i)$ рекуррентті түрде $\tilde{z}_j(\theta_i)$ және $\tilde{y}_j(\theta_i), j < k$ функциялары арқылы өрнектеледі.

Жоғарыда алынған теңдіктерден (2.1), (2.12) және (2.13) тендеулер келесі түрге келеді:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{z}'_0(t) + \varepsilon \tilde{z}'_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{z}'_k(t) + \dots) &= \tilde{F}_0(t) + \varepsilon \tilde{F}_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{F}_k(t) + \dots, \\
\tilde{y}'_0(t) + \varepsilon \tilde{y}'_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{y}'_k(t) + \dots &= \tilde{f}_0(t) + \varepsilon \tilde{f}_1(t) + \dots + \varepsilon^k \tilde{f}_k(t) + \dots, \\
\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon \dot{\omega}_1^{(i)}(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) + \dots &= \Pi_0 F(\tau_i) + \varepsilon \Pi_1 F(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k F(\tau_i) + \dots, \\
\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) + \varepsilon \dot{\nu}_1^{(i)}(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) + \dots &= \Pi_0 f(\tau_i) + \varepsilon \Pi_1 f(\tau_i) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k f(\tau_i) + \dots, \\
\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Delta \tilde{z}_k \big|_{t=\theta_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(0) \right) &= \tilde{I}_{i0}(\theta_i) + \varepsilon \tilde{I}_{i1}(\theta_i) + \dots + \varepsilon^k \tilde{I}_{ik}(\theta_i) + \dots, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Delta \tilde{y}_k \big|_{t=\theta_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(0) &= \tilde{J}_{i0}(\theta_i) + \varepsilon \tilde{J}_{i1}(\theta_i) + \dots + \varepsilon^k \tilde{J}_{ik}(\theta_i) + \dots
\end{aligned}$$

Енді (2.10) жіктелуді (2.2) бастапқы шартқа қойсақ, онда

$$z(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{z}_k(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k^{(0)}(0) = z^0,$$

$$y(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{y}_k(0) + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \nu_k^{(0)}(0) = y^0.$$

Шын мәнінде, жоғарыдағы асимптотикалық жіктелу элементтері n –ші мүшеге дейін қарастырылады. Енді нөлінші жуықтау элементтерін $\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), \omega_0^{(i)}(\tau_i)$ және $\nu_0^{(i)}(\tau_i), i = 1, 2, \dots, p$, табу үшін ε -нің бірдей дәрежелерінің алдын теңестірсек, онда келесі жүйелер алынады:

$$\begin{aligned} 0 &= F(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), 0), \\ \tilde{y}_0'(t) &= f(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = F(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) - F(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) = \Pi_0 F(\tau_i), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) &= f(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) - f(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) = \Pi_0 f(\tau_i), \\ 0 &= \frac{I_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i} + \omega_0^{(i)}(0) &= I_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_1(\theta_i) + I_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_1(\theta_i) + I_{i\varepsilon}(\theta_i) = \tilde{I}_{i1}(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0), \\ \Delta \tilde{y}_0|_{t=\theta_i} &= J_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) = J_{i0}(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)), \\ \tilde{z}_0(0) + \omega_0^{(0)}(0) &= z^0, \quad \tilde{y}_0(0) = y^0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ал $\varepsilon^k (k \geq 1)$ дәрежесінің алдындағы коэффициенттерін табу үшін келесі теңдеулер қолданылады:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{k-1}'(t) &= F_z(t) \tilde{z}_k(t) + F_y(t) \tilde{y}_k(t) + F_k(t), \\ \tilde{y}_k'(t) &= f_z(t) \tilde{z}_k(t) + f_y(t) \tilde{y}_k(t) + f_k(t), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) = F_z(\tau_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) + F_y(\tau_i) \nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + G_k(\tau_i) = \Pi_k F(\tau_i), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) &= f_z(\tau_i) \omega_k^{(i)}(\tau_i) + f_y(\tau_i) \nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + Q_k(\tau_i) = \Pi_k f(\tau_i), \\ \Delta \tilde{z}_k|_{t=\theta_i} + \omega_k^{(i)}(0) &= I_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + I_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + I_{i,k+1}(\theta_i), \\ \Delta \tilde{y}_k|_{t=\theta_i} + \nu_{k-1}^{(i)}(0) &= J_{iz}(\theta_i) \tilde{z}_k(t) + J_{iy}(\theta_i) \tilde{y}_k(\theta_i) + J_{ik}(\theta_i), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\tilde{z}_k(0) + \omega_k^{(0)}(0) = 0, \quad \tilde{y}_k(0) + \nu_{k-1}^{(0)}(0) = 0.$$

Алдымен $t \in [0, \theta_1]$ кесіндісін қарастырайық. Енді ε^0 алдындағы коэффициенттері $\tilde{z}_0(t)$ және $\tilde{y}_0(t)$ жуықтауларын табу үшін, келесі есеп алынады:

$$0 = F(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), 0),$$

$$\tilde{y}'_0(t) = f(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)), \tilde{y}_0(0) = y^0.$$

(C2) және (C3) шарттарының күшімен және соңғы есептен $\tilde{z}_0(t) = \tilde{z}(t), \tilde{y}_0(t) = \tilde{y}(t)$ табылады. Енді (2.15) ескерсек, онда (2.16) теңдеу төмендегі түрге келеді:

$$\dot{\omega}_0^{(0)}(\tau_0) = F(\tilde{z}_0(\theta_0) + \omega_0^{(0)}(\tau_0), \tilde{y}_0(\theta_0), 0).$$

Соңғы теңдеуден және

$$\omega_0^{(0)}(0) = z^0 - \tilde{z}_0(0)$$

бастапқы шартынан, $\omega_0^{(0)}(\tau_0)$ табуға болады. (C5) шартының күшімен, $\omega_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясы экспоненциалды бағалауға ие, яғни

$$\|\omega_0^{(0)}(\tau_0)\| \leq c \exp(-\kappa\tau_0), \quad (2.22)$$

мұндағы c және κ оң сандар. Енді

$$\dot{\nu}_0^{(0)}(\tau_0) = f(\tilde{z}_0(\theta_0) + \omega_0^{(0)}(\tau_0), \tilde{y}_0(\theta_0)) - f(\tilde{z}_0(\theta_0), \tilde{y}_0(\theta_0)) = \Pi_0 f(\tau_0).$$

теңдеуін шешу керек. Ол үшін (2.11) шартты қолдансақ,

$$\nu_0^{(0)}(0) = \int_{\infty}^0 \Pi_0 f(s) ds$$

бастапқы шарты және

$$\nu_0^{(0)}(\tau_0) = \int_{\infty}^{\tau_0} \Pi_0 f(s) ds$$

табылады. Жоғарыдағы $\|\Pi_0 f(\tau_0)\| \leq c \exp(-\kappa\tau_0)$ бағалауына ие болғандықтан, $\nu_0^{(0)}(\tau_0)$ функциясы үшін келесі

$$\|\nu_0^{(0)}(\tau_0)\| \leq c \exp(-\kappa\tau_0)$$

бағалауы орынды.

Ал ε^k алдындағы $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t)$ коэффициенттерін табу үшін келесі есептер алынады:

$$\begin{aligned}\tilde{z}'_{k-1}(t) &= F_z(t)\tilde{z}_k(t) + F_y(t)\tilde{y}_k(t) + F_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= f_z(t)\tilde{z}_k(t) + f_y(t)\tilde{y}_k(t) + f_k(t), \quad \tilde{y}_k(0) + \nu_{k-1}^{(0)}(0) = 0.\end{aligned}$$

Осыдан кейін $\omega_k^{(0)}(\tau_0)$ функциясы

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k^{(0)}(\tau_0) &= F_z(\tau_0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) + F_y(\tau_0)\nu_{k-1}^{(0)}(\tau_0) + G_k(\tau_0), \\ \omega_k^{(0)}(0) &= -\tilde{z}_k(0).\end{aligned}$$

есепінен анықталады.

Енді

$$\dot{\nu}_k^{(0)}(\tau_0) = f_z(\tau_0)\omega_k^{(0)}(\tau_0) + f_y(\tau_0)\nu_{k-1}^{(0)}(\tau_0) + Q_k(\tau_0) = \Pi_k f(\tau_0).$$

теңдеуін шешу үшін (2.11) шартын қолдансақ,

$$\nu_k^{(0)}(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_k f(s) ds,$$

бастапқы шарты табылады. Кейін осы шарттан

$$\nu_k^{(0)}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\tau_0} \Pi_k f(s) ds$$

функциясын табамыз.

Жоғарыдағы $\Pi_k F(\tau_0)$ және $\Pi_k f(\tau_0)$ функциялары (2.22) түрдегі экспоненциалды бағалауға ие. Демек келесі теңсіздіктер орынды:

$$\begin{aligned}\|\omega_k^{(0)}(\tau_0)\| &\leq c \exp(-\kappa \tau_0), \\ \|\nu_k^{(0)}(\tau_0)\| &\leq c \exp(-\kappa \tau_0).\end{aligned}$$

Енді келесі интервалды $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, p$ қарастырайық. Осы интервал үшін ε^0 алдындағы коэффициенттері $\tilde{z}_0(t)$ және $\tilde{y}_0(t)$ төмендегі есептен табылады:

$$0 = F(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t), 0), \quad 0 = I_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0), \\ \tilde{y}_0'(t) = f(\tilde{z}_0(t), \tilde{y}_0(t)), \quad \Delta \tilde{y}_0|_{t=\theta_i} = J_i(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)).$$

Соңғы есептен (C2) және (C3) шарттарын ескерсек, алдымен $\tilde{z}_0(t) = \tilde{z}(t)$, кейін $\tilde{y}_0(t) = \tilde{y}(t)$ анықталады. Осыдан кейін (2.15) теңдеуді қолдансақ, (2.16) теңдеуді

$$\dot{\omega}_0^{(i)}(\tau_i) = F(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

түрінде жазуға болады.

Соңғы теңдеуден және

$$\omega_0^{(i)}(0) = I_{iz}(\theta_i)\tilde{z}_1(\theta_i) + I_{iy}(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) + I_{i\varepsilon}(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

бастапқы шарттан $\omega_0^{(i)}(\tau_i)$ анықталады, мұндағы $\omega_0^{(i)}(0)$ бастапқы шартын төмендегідей түрлендіруге болады. Ол үшін (2.15) және (2.17) теңдеулерінің екі жағын дифференциалдау керек, яғни

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} d\tilde{y}_0 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0}, \\ \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 + \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{y}_0} d\tilde{y}_0 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 = -\frac{\partial I_i}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Енді (2.23) формуладағы бірінші теңдеуді (2.19)-ге қойсақ, онда

$$\tilde{z}_0'(\theta_i) = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_1(\theta_i) + F_y(\theta_i)\tilde{y}_1(\theta_i) + F_1(\theta_i).$$

Бұдан

$$F_y(\theta_i) \left[\tilde{y}_1(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_1(\theta_i) \right] = \tilde{z}_0'(\theta_i) - F_1(\theta_i).$$

Соңғы теңдіктен

$$\tilde{y}_1(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_1(\theta_i) = \frac{1}{F_y(\theta_i)} (\tilde{z}_0'(\theta_i) - F_1(\theta_i)). \quad (2.24)$$

шығады. Осыдан кейін (2.23) формуладағы екінші теңдеуді (2.21) формулаға қойсақ,

$$\omega_0^{(i)}(0) = I_{iy}(\theta_i) \left[\tilde{y}_1(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_1(\theta_i) \right] + I_{i\varepsilon}(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

Тік жақшаның ішіндегі өрнекке (2.24) формуланы қойсақ, онда

$$\omega_0^{(i)}(0) = \frac{I_{iy}(\theta_i)}{F_y(\theta_i)} (\tilde{z}'_0(\theta_i) - F_1(\theta_i)) + I_{i\varepsilon}(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

алынады. Жоғарыдағы (C5) шартының күшімен, $\omega_0^{(i)}(\tau_i)$ функциясы төмендегі экспоненциалды бағалауға ие:

$$\|\omega_0^{(i)}(\tau_i)\| \leq c \exp(-\kappa \tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.25)$$

мұндағы c және κ оң сандар.

Енді төмендегі теңдеуді шешу қалды

$$\dot{\nu}_0^{(i)}(\tau_i) = f(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) - f(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i)) = \Pi_0 f(\tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Ол үшін (2.11) шартты қолдансақ,

$$\nu_0^{(i)}(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_0 f(s) ds,$$

бастапқы шарт табылады. Кейін осы шарт арқылы

$$\nu_0^{(i)}(\tau_i) = \int_{-\infty}^{\tau_i} \Pi_0 f(s) ds$$

функциясы анықталады.

Жоғарыдағы $\|\Pi_0 f(\tau_i)\| \leq c \exp(-\kappa \tau_i)$ теңсіздігін қанағаттандыратындықтан, келесі бағалау орынды:

$$\|\nu_0^{(i)}(\tau_i)\| \leq c \exp(-\kappa \tau_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Келесі қадамда ε^k дәрежесінің алдындағы $\tilde{z}_k(t)$ және $\tilde{y}_k(t)$ коэффициенттерін анықтайтын төмендегі жүйелер алынады:

$$\begin{aligned}\tilde{z}'_{k-1}(t) &= F_z(t)\tilde{z}_k(t) + F_y(t)\tilde{y}_k(t) + F_k(t), \\ \tilde{y}'_k(t) &= f_z(t)\tilde{z}_k(t) + f_y(t)\tilde{y}_k(t) + f_k(t), \\ \Delta\tilde{y}_k|_{t=\theta_i} + \nu_{k-1}^{(i)}(0) &= J_{iz}(\theta_i)\tilde{z}_k(t) + J_{iy}(\theta_i)\tilde{y}_k(\theta_i) + J_{ik}(\theta_i).\end{aligned}$$

Содан кейін $\omega_k^{(i)}(\tau_i)$, $i=1,2,\dots,p$, функциясын табу үшін келесі есеп алынады:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k^{(i)}(\tau_i) &= F_z(\tau_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) + F_y(\tau_i)\nu_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + G_k(\tau_i), \\ \omega_k^{(i)}(0) &= I_{iz}(\theta_i)\tilde{z}_{k+1}(t) + I_{iy}(\theta_i)\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + I_{i,k+1}(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i},\end{aligned}$$

мұдағы $\omega_k^{(i)}(0)$ функциясын төмендегідей түрлендіріп жазуға болады. Жоғарыдағы (2.15) және (2.17) теңдеулерінің екі жағын дифференциалдасақ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} d\tilde{y}_0 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0}, \\ \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 + \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{y}_0} d\tilde{y}_0 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial I_i}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 = -\frac{\partial I_i}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Енді (2.26) формуладағы бірінші теңдеуді (2.19) формулаға қойсақ,

$$\tilde{z}'_k(\theta_i) = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}_0} \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) + F_y(\theta_i)\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) + F_{k+1}(\theta_i).$$

Бұдан,

$$F_y(\theta_i) \left[\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) \right] = \tilde{z}'_k(\theta_i) - F_{k+1}(\theta_i).$$

Онда квадрат жақшаны өрнектесек,

$$\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) = \frac{1}{F_y(\theta_i)} (\tilde{z}'_k(\theta_i) - F_{k+1}(\theta_i)).\tag{2.27}$$

Тура осылай (2.26) формуладағы екінші теңдеуді (2.21) теңдікке қойсақ,

$$\omega_k^{(i)}(0) = I_{iy}(\theta_i) \left[\tilde{y}_{k+1}(\theta_i) - \frac{d\tilde{y}_0}{d\tilde{z}_0} \tilde{z}_{k+1}(\theta_i) \right] + I_{i,k+1}(\theta_i) - \Delta\tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, \quad i=1,2,\dots,p.$$

Квадрат жақшаның ішіндегі өрнекті (2.27) формуламен алмастырсақ, $\omega_k^{(i)}(0)$ бастапқы мәнін келесі түрде жазуға болады

$$\omega_k^{(i)}(0) = \frac{I_{iy}(\theta_i)}{F_y(\theta_i)} (\tilde{z}'_k(\theta_i) - F_{k+1}(\theta_i)) + I_{i,k+1}(\theta_i) - \Delta \tilde{z}_k|_{t=\theta_i}, i=1,2,\dots,p.$$

Соңында

$$\dot{v}_k^{(i)}(\tau_i) = f_z(\tau_i)\omega_k^{(i)}(\tau_i) + f_y(\tau_i)v_{k-1}^{(i)}(\tau_i) + Q_k(\tau_i) = \Pi_k f(\tau_i), i=1,2,\dots,p.$$

теңдеуін шешу үшін (2.11) шартты қолданып,

$$v_k^{(i)}(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_k f(s) ds,$$

бастапқы шартын табамыз. Ал осы шарт арқылы

$$v_k^{(i)}(\tau_i) = \int_{-\infty}^{\tau_i} \Pi_k f(s) ds.$$

функциясы табылады.

Жоғарыдағы $\Pi_k F(\tau_i)$ және $\Pi_k f(\tau_i)$ функциялары (2.25) түрдегі асимптотикалық бағалауға ие. Сондықтан келесі теңсіздіктер орындалатынын дәлелдеуге болады:

$$\begin{aligned} \|\omega_k^{(i)}(\tau_i)\| &\leq c \exp(-\kappa \tau_i), i=1,2,\dots,p, \\ \|v_k^{(i)}(\tau_i)\| &\leq c \exp(-\kappa \tau_i), i=1,2,\dots,p. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Нәтижесінде жоғарыда көрсетілген алгоритмді қолданып, (2.10) асимптотикалық жіктелудің кез келген $k = n$ номеріне дейінгі мүшелерін табуға болады.

2.3 Шешімнің асимптотикасының негіздемесі.

Бұл бөлімде, бір қабатты және көп қабатты сингулярлық жағдайларын сипаттайтын Теорема 2.1 және Теорема 2.2 дәлелденеді. Алдымен $t=0$ нүктесінің маңында пайда болатын бір қабатты сингулярлық, кейін $t=0$ және $t=\theta_i, i=1,2,\dots,p$, нүктелерінің маңында пайда болатын көп қабатты сингулярлық құбылыстары қарастырылады. Сонымен қатар, (2.9) қатардың

дербес қосындысы (2.1), (2.2) есебі шешімінің бірқалыпты асимптотикалық жуық шешімі екені дәлелденеді.

2.3 Бір қабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы

Бұл бөлімде, $t = 0$ нүктесінің маңында шешімнің бірқалыпты жинақты болмайтын жағдай қарастырылады. Себебі барлық $\varepsilon > 0$ үшін $z(0, \varepsilon) = z^0$ және $z^0 \neq \varphi$. Бірқалыпты жинақты болмайтын интервалды *шекаралық қабат* деп атайды.

Жоғарыдағы (C6) шартының күшімен (2.14) формуладан келесі теңдік орынды екені шығады:

$$\tilde{I}_{i1}(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) = 0, i = 1, 2, \dots, p.$$

Онда (2.18) формуладағы бірінші теңдеу келесі түрге келеді:

$$\omega_0^{(i)}(0) = -\Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, i = 1, 2, \dots, p.$$

Соңғы теңдікті (2.9) жіктелуге қойсақ,

$$z(\theta_i +, \varepsilon) = \tilde{z}_0(\theta_i +) + \omega_0^{(i)}(0) + O(\varepsilon) = \tilde{z}_0(\theta_i) + O(\varepsilon), i = 1, 2, \dots, p.$$

Бұл жерден $t > 0$ болғанда $\|z(t, \varepsilon) - \varphi\| = O(\varepsilon)$, яғни бірқалыпты жинақты болмайтын облыс қалыңдығы $O(\varepsilon)$ ге тең. Онда ε жеткілікті кіші мәнін таңдай отырып, $O(\varepsilon)$ нөлге ұмтылдыруға болады. Бұл (2.1), (2.2) есебінің $z(t, \varepsilon)$ шешімінің ε -нің жеткілікті кіші мәнінде $t = \theta_i, i = 1, 2, \dots, p$, нүктелерінің маңайында шекаралық қабатты құбылысы болмайтынын көрсетеді.

Теорема 2.1 Айталық (C1)–(C5) және (C6) шарттары орындалсын. Онда кез келген $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ үшін оң тұрақтылар ε_0 және c табылып, (2.1), (2.2) есебінің $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ шешімі $[0, T]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T, \\ \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| &\leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{2.29}$$

мұндағы

$$Z_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), i=1,2,\dots,p,$$

$$Y_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), i=1,2,\dots,p.$$

Дәлелдеуі. Бастапқы берілген (2.1) және (2.2) есеп шешімдері $z(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + Z_n(t, \varepsilon)$ және $y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + Y_n(t, \varepsilon)$ арқылы алмастырылады, онда

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du}{dt} &= F_z u + F_y v + G_1(u, v, t, \varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} &= f_z u + f_y v + G_2(u, v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \Delta u|_{t=\theta_i} &= I_{iz} u + I_{iy} v + Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon), \\ \Delta v|_{t=\theta_i} &= J_{iz} u + J_{iy} v + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.30)$$

теңдеулер жүйесі

$$u(0, \varepsilon) = 0, v(0, \varepsilon) = 0, \quad (2.31)$$

бастапқы шартымен алынады, мұндағы F_z, F_y, f_z and f_y матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)$, $i=1,2,\dots,p$ нүктесінде есептеледі,

$$\begin{aligned} G_1(u, v, t, \varepsilon) &= F(u + Z_n, v + Y_n, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dZ_n}{dt} - F_z u - F_y v, \\ G_2(u, v, t, \varepsilon) &= f(u + Z_n, v + Y_n) - \frac{dY_n}{dt} - f_z u - f_y v, \\ Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon) &= I_i(u + Z_n^{(i-1)}, v + Y_n^{(i-1)}, \varepsilon) + \varepsilon Z_n^{(i-1)} - \varepsilon Z_n^{(i)} - I_{iz} u - I_{iy} v, \\ Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon) &= J_i(u + Z_n^{(i-1)}, v + Y_n^{(i-1)}) + Y_n^{(i-1)} - Y_n^{(i)} - J_{iz} u - J_{iy} v. \end{aligned}$$

$G(u, v, t, \varepsilon)$ функциясы келесі екі қасиетке ие:

$$1) G_1(0, 0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), G_2(0, 0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

2) Егер $\|u_i\| \leq c_1 \varepsilon, \|v_i\| \leq c_1 \varepsilon$, $i=1,2$, орындалса, онда $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ аралығында төмендегі теңсіздік орындалатындай c_2 және ε_0 сандары табылады:

$$\|G_i(u_1, v_1, t, \varepsilon) - G_i(u_2, v_2, t, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), i=1,2.$$

Енді 1) қасиетті $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$ аралығында дәлелдейік:

$$\begin{aligned}
G_2(0,0,t,\varepsilon) &= f(Z_n, Y_n) - \frac{dY_n}{dt} = \\
&= \left[f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\tilde{z}_k(\varepsilon\tau_i) + \omega_k^{(i)}(\tau_i)), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\tilde{y}_k(\varepsilon\tau_i) + \varepsilon v_k^{(i)}(\tau_i)) \right) - \right. \\
&\quad \left. - f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\varepsilon\tau_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\varepsilon\tau_i) \right) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \dot{v}_k^{(i)}(\tau_i) \right] + \\
&\quad + \left[f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\varepsilon\tau_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\varepsilon\tau_i) \right) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k'^{(i)}(t) \right] = \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \Pi_k f(\tau_i) + O(\varepsilon^{n+1}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \dot{v}_k^{(i)}(\tau_i) \right] + \\
&\quad + \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{f}_k(t) + O(\varepsilon^{n+1}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k'^{(i)}(t) \right] = O(\varepsilon^{n+1}),
\end{aligned}$$

мұндағы $\tilde{y}_k^{(i)}(t), v_k^{(i)}(\tau_i), i=1,2,\dots,p$ функциялары жоғарыда көрсетілген алгоритм арқылы табылады. Ал $G_j, j=1,2$, функцияларының 2) қасиеті орта мән туралы теоремадан шығады. Шыныменде,

$$\begin{aligned}
G_i(u_1, v_1, t, \varepsilon) - G_i(u_2, v_2, t, \varepsilon) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} G_i(su_1 + (1-s)u_2, sv_1 + (1-s)v_2, t, \varepsilon) ds = \\
&= \int_0^1 \partial_u G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) ds \cdot (u_1 - u_2) + \int_0^1 \partial_v G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) ds \cdot (v_1 - v_2),
\end{aligned}$$

мұндағы $u^*(s) = su_1 + (1-s)u_2, v^*(s) = sv_1 + (1-s)v_2$,

$$\begin{aligned}
\partial_u G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) &= \partial_z F(u^*(s) + Z_n, v^*(s) + Y_n, \varepsilon) - \partial_z F(Z_0, Y_0, 0), \\
\partial_v G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) &= \partial_y F(u^*(s) + Z_n, v^*(s) + Y_n, \varepsilon) - \partial_y F(Z_0, Y_0, 0),
\end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
\|u^*(s) + Z_n(t, \varepsilon) - Z_0(t)\| &\leq \|u^*(s)\| + C\varepsilon, \\
\|v^*(s) + Y_n(t, \varepsilon) - Y_0(t)\| &\leq \|v^*(s)\| + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Онда $F(z, y, \varepsilon)$ және $f(z, y)$ функцияларының бірінші туындыларының үзіліссіздігінен 2) қасиеттің орынды екені шығады. Тура осылай, $Q_i(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon)$, $i=1,2$, функцияларыда келесі екі қасиетке ие:

$$1^*) Q_1(0,0,\theta_i,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), Q_2(0,0,\theta_i,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

2*) Егер $\|u_i\| \leq c_1 \varepsilon, \|v_i\| \leq c_1 \varepsilon$, $i=1,2$, орындалса, онда $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ аралығында төмендегі теңсіздік орындалатындай c_2 және ε_0 сандары табылады:

$$\|Q_i(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon) - Q_i(u_2, v_2, \theta_i, \varepsilon)\| \leq \varepsilon (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), i=1,2.$$

Жоғарыдағы $Q_1(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon)$ үшін 1*) қасиеттің орынды екені келесі теңдіктен шығады:

$$\begin{aligned} Q_1(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon) &= I_i(Z_n^{(i-1)}, Y_n^{(i-1)}, \varepsilon) + \varepsilon Z_n^{(i-1)} - \varepsilon Z_n^{(i)} = \\ &= I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{y}_k(\theta_i) + \varepsilon \nu_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \varepsilon \right) + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i)}(0) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) + \\ &\quad + \left[I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{y}_k(\theta_i) + \varepsilon \nu_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \varepsilon \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\theta_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\theta_i), \varepsilon \right) \right] + \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{I}_{ik}(\theta_i) + O(\varepsilon^{n+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k|_{t=\theta_i} + \omega_k^{(i)}(0) \right) - \varepsilon^{n+1} \left(\tilde{z}_n|_{t=\theta_i} + \omega_n^{(i)}(0) \right) \right] = O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Алғашқы екі қосынды $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда, (2.28) бағалаудың және орта мән туралы теореманың әсерінен экспоненциалды кемиді. Ал үшінші қосынды $O(\varepsilon^{n+1})$ түрінде бағаланады. Келесі 2*) қасиет жоғарыдағы 2) қасиетке ұқсас дәлелденеді. Енді, (2.30)-(2.31) импульсті жүйені эквивалентті интегралдық теңдеулермен алмастырайық,

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s, \varepsilon) [F_y(s, \varepsilon) v(s, \varepsilon) + G_1(u, v, s, \varepsilon)] ds +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{0 < \theta_i < t} U(t, \theta_i, \varepsilon) \left(E + \frac{I_{iz}(\theta_i)}{\varepsilon} \right)^{-1} (I_{iy}(\theta_i) v(\theta_i) + Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon)), \quad (2.32)$$

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [f_z(s, \varepsilon) u(s, \varepsilon) + G_2(u, v, s, \varepsilon)] ds +$$

$$+ \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (E + J_{iy}(\theta_i))^{-1} (J_{iz}(\theta_i) u(\theta_i) + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon)), \quad (2.33)$$

мұндағы $U(t, \theta_i, \varepsilon)$ және $V(t, \theta_i, \varepsilon)$ төмендегі жүйенің фундаменталды матрицасы:

$$\varepsilon \frac{dU}{dt} = F_z(t, \varepsilon) U, t \neq \theta_i, \varepsilon \Delta U|_{t=\theta_i} = I_{iz}(\theta_i) U, U(s, s, \varepsilon) = E,$$

$$\frac{dV}{dt} = f_y(t, \varepsilon) V, t \neq \theta_i, \Delta V|_{t=\theta_i} = J_{iy}(\theta_i) V, V(s, s, \varepsilon) = E.$$

Бұл жүйедегі $U(t, s, \varepsilon)$ функциясы үшін

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}(t-s)\right), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

бағалауы орындалады.

Енді (2.33) теңдеу арқылы анықталған $v(t, \varepsilon)$ функциясын (2.32) өрнегіне қойсақ, онда

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t K(t, s, \varepsilon) u(s, \varepsilon) ds + W_1(u, v, t, \varepsilon),$$

мұндағы $K(t, s, \varepsilon)$ шенелген өзек, ал $W_1(u, v, t, \varepsilon)$ операторы $G(u, v, t, \varepsilon)$ функциясы сияқты екі қасиетті қанағаттандырады. Соңғы теңдеуді эквивалентті теңдеумен алмастырсақ,

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t R(t, s, \varepsilon) W_1(u, v, s, \varepsilon) ds + W_1(u, v, t, \varepsilon) = T_1(u, v, t, \varepsilon), \quad (2.34)$$

мұндағы $R(t, s, \varepsilon) = K(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы. Енді $u(t, \varepsilon)$ функциясын өрнектейтін (2.34) формуланы (2.33) теңдеуге қойсақ, онда

$$\begin{aligned}
v(t, \varepsilon) &= \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [f_z(s, \varepsilon) T_1(u, v, t, \varepsilon) + G_2(u, v, s, \varepsilon)] ds + \\
&\sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (E + J_{iy}(\theta_i))^{-1} (J_{iz}(\theta_i) T_1(u, v, \theta_i, \varepsilon) + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon)) = \\
&= T_2(u, v, t, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

мұндағы $T_1(u, v, t, \varepsilon)$ және $T_2(u, v, t, \varepsilon)$ операторлары $G(u, v, s, \varepsilon)$ функциясы қанағаттандыратын екі қасиетке ие. Келесі қадамда (2.34), (2.35) теңдеулерге біртіндеп жуықтау әдісін қолдансақ, онда (2.1), (2.2) есептің жалғыз шешімі бар екені және келесі бағалауды қанағаттандыратыны шығады

$$\begin{aligned}
\|u(t, \varepsilon)\| &= \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\
\|v(t, \varepsilon)\| &= \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Нәтижеде теорема дәлелденді.

2.4 Көп қабатты сингулярлық құбылысының асимптотикасы

Алдыңғы бөлімде, бір қабатты сингулярлық жағдай қарастырылды. Ал осы бөлімде көпқабатты сингулярлық құбылысы қарастырылады. Импульсті функцияға байланысты жинақтылық кейбір нүктелерде бірқалыпты болмауы мүмкін. Міне осы жағдайды *көпқабатты* сингулярлық деп атайды. Ол қабаттар біздің жағдайымызда $t = 0$ және $t = \theta_i, i = 1, 2, \dots, p$ нүктелерінің маңайында кездеседі.

Көпқабатты сингулярлық құбылысын алу үшін (2.1), (2.2) есепті (C1)-(C5) шарттарымен және келесі қосымша шартпен қарастырады:

$$\text{(C7)} \quad \lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{I_i(z(\theta_i, \varepsilon), y(\theta_i, \varepsilon), \varepsilon)}{\varepsilon} = I_i \neq 0, \quad \text{және} \quad \varphi(\tilde{y}_0(\theta_i), \theta_i) + I_i, i = 1, 2, \dots, p,$$

шамалары $\varphi(\tilde{y}_0(t), t)$ – дің тартылыс аймағында жатады.

Онда (2.14) теңдікке (C7) шартын қолдансақ, төмендегі теңдік орынды:

$$\tilde{I}_{i1}(\tilde{z}_0(\theta_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0) = I_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Сондықтан, (2.18) формуладағы бірінші теңдеу келесі түрде жазылады:

$$\omega_0^{(i)}(0) = I_i - \Delta \tilde{z}_0|_{t=\theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Соңғы өрнекті (2.9) асимптотикалық жіктелуге қойсақ,

$$z(\theta_i +, \varepsilon) = \tilde{z}_0(\theta_i +) + \omega_0^{(i)}(0) + O(\varepsilon) = \tilde{z}_0(\theta_i) + I_i + O(\varepsilon), i = 1, 2, \dots, p.$$

теңдігі алынады. (C7) шартының әсерінен, әрбір импульс моментінде $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда, $\|z(\theta_i +, \varepsilon) - \varphi\| = I_i + O(\varepsilon)$ айырымы нөлге ұмтылмайды. Сондықтан жинақтылық бірқалыпты емес. Онда (2.1) жүйенің (2.2) бастапқы шартымен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t = 0$ and $t = \theta_i, i = 1, 2, \dots, p$ нүктелерінің маңында шекаралық қабатқа ие.

Теорема 2.2 Айталық (C1)–(C5) және (C7) шарттары орындалсын. Онда кез келген $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ үшін оң тұрақтылар ε_0 және c табылып, (2.1), (2.2) есебінің $z(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ шешімі $[0, T]$ кесіндісінде бар, жалғыз болады және төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T,$$

$$\|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, 0 \leq t \leq T,$$

мұндағы

$$Z_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), i = 1, 2, \dots, p,$$

$$Y_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), i = 1, 2, \dots, p.$$

Дәлелдеуі. Бастапқы берілген (2.1) және (2.2) есеп шешімдері $z(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + Z_n(t, \varepsilon)$ және $y(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + Y_n(t, \varepsilon)$ арқылы алмастырылады, онда

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du}{dt} &= F_z u + F_y v + G_1(u, v, t, \varepsilon), \\ \frac{dv}{dt} &= f_z u + f_y v + G_2(u, v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \Delta u|_{t=\theta_i} &= I_{iz} u + I_{iy} v + Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon), \\ \Delta v|_{t=\theta_i} &= J_{iz} u + J_{iy} v + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.36}$$

теңдеулер жүйесі

$$u(0, \varepsilon) = 0, v(0, \varepsilon) = 0, \tag{2.37}$$

бастапқы шартымен алынады, мұндағы F_z, F_y, f_z and f_y матрицалары $(\tilde{z}_0(\theta_i) + \omega_0^{(i)}(\tau_i), \tilde{y}_0(\theta_i), 0)$, $i = 1, 2, \dots, p$ нүктесінде есептеледі,

$$\begin{aligned}
G_1(u, v, t, \varepsilon) &= F(u + Z_n, v + Y_n, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dZ_n}{dt} - F_z u - F_y v, \\
G_2(u, v, t, \varepsilon) &= f(u + Z_n, v + Y_n) - \frac{dY_n}{dt} - f_z u - f_y v, \\
Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon) &= I_i(u + Z_n^{(i-1)}, v + Y_n^{(i-1)}, \varepsilon) + \varepsilon Z_n^{(i-1)} - \varepsilon Z_n^{(i)} - I_{iz} u - I_{iy} v, \\
Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon) &= J_i(u + Z_n^{(i-1)}, v + Y_n^{(i-1)}) + Y_n^{(i-1)} - Y_n^{(i)} - J_{iz} u - J_{iy} v.
\end{aligned}$$

$G(u, v, t, \varepsilon)$ функциясы келесі екі қасиетке ие:

$$1) G_1(0, 0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), G_2(0, 0, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

2) Егер $\|u_i\| \leq c_1 \varepsilon, \|v_i\| \leq c_1 \varepsilon, \quad i = 1, 2,$ орындалса, онда $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ аралығында төмендегі теңсіздік орындалатындай c_2 және ε_0 сандары табылады:

$$\|G_i(u_1, v_1, t, \varepsilon) - G_i(u_2, v_2, t, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), i = 1, 2.$$

Енді 1) қасиетті $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}]$ аралығында дәлелдейік:

$$\begin{aligned}
G_2(0, 0, t, \varepsilon) &= f(Z_n, Y_n) - \frac{dY_n}{dt} = \\
&= \left[f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\tilde{z}_k(\varepsilon \tau_i) + \omega_k^{(i)}(\tau_i)), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\tilde{y}_k(\varepsilon \tau_i) + \varepsilon \nu_k^{(i)}(\tau_i))\right) - \right. \\
&\quad \left. - f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\varepsilon \tau_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\varepsilon \tau_i)\right) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) \right] + \\
&\quad + \left[f\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\varepsilon \tau_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\varepsilon \tau_i)\right) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k'^{(i)}(t) \right] = \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \Pi_k f(\tau_i) + O(\varepsilon^{n+1}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \dot{\nu}_k^{(i)}(\tau_i) \right] + \\
&\quad + \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{f}_k(t) + O(\varepsilon^{n+1}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k'^{(i)}(t) \right] = O(\varepsilon^{n+1}),
\end{aligned}$$

мұндағы $\tilde{y}_k^{(i)}(t), \nu_k^{(i)}(\tau_i), i = 1, 2, \dots, p.$ функциялары жоғарыда көрсетілген алгоритм арқылы табылады. Ал $G_j, j = 1, 2,$ функцияларының 2) қасиеті орта мән туралы теоремадан шығады. Шыныменде,

$$G_i(u_1, v_1, t, \varepsilon) - G_i(u_2, v_2, t, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} G_i(su_1 + (1-s)u_2, sv_1 + (1-s)v_2, t, \varepsilon) ds =$$

$$= \int_0^1 \partial_u G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) ds \cdot (u_1 - u_2) + \int_0^1 \partial_v G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) ds \cdot (v_1 - v_2),$$

мұндағы $u^*(s) = su_1 + (1-s)u_2, v^*(s) = sv_1 + (1-s)v_2,$

$$\begin{aligned} \partial_u G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) &= \partial_z F(u^*(s) + Z_n, v^*(s) + Y_n, \varepsilon) - \partial_z F(Z_0, Y_0, 0), \\ \partial_v G_i(u^*(s), v^*(s), t, \varepsilon) &= \partial_y F(u^*(s) + Z_n, v^*(s) + Y_n, \varepsilon) - \partial_y F(Z_0, Y_0, 0), \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned} \|u^*(s) + Z_n(t, \varepsilon) - Z_0(t)\| &\leq \|u^*(s)\| + C\varepsilon, \\ \|v^*(s) + Y_n(t, \varepsilon) - Y_0(t)\| &\leq \|v^*(s)\| + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Онда $F(z, y, \varepsilon)$ және $f(z, y)$ функцияларының бірінші туындыларының үзіліссіздігінен 2) қасиеттің орынды екені шығады. Тура осылай, $Q_i(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon), i = 1, 2$, функцияларыда келесі екі қасиетке ие:

$$1^*) Q_1(0, 0, \theta_i, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), Q_2(0, 0, \theta_i, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

2*) Егер $\|u_i\| \leq c_1 \varepsilon, \|v_i\| \leq c_1 \varepsilon, i = 1, 2$, орындалса, онда $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ аралығында төмендегі теңсіздік орындалатындай c_2 және ε_0 сандары табылады:

$$\|Q_i(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon) - Q_i(u_2, v_2, \theta_i, \varepsilon)\| \leq \varepsilon (\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), i = 1, 2.$$

Жоғарыдағы $Q_1(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon)$ үшін 1*) қасиеттің орынды екені келесі теңдіктен шығады:

$$\begin{aligned} Q_1(u_1, v_1, \theta_i, \varepsilon) &= I_i(Z_n^{(i-1)}, Y_n^{(i-1)}, \varepsilon) + \varepsilon Z_n^{(i-1)} - \varepsilon Z_n^{(i)} = \\ &= I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{y}_k(\theta_i) + \varepsilon \nu_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \varepsilon \right) + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i)}(0) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) + \\ &\quad + \left[I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k(\theta_i) + \omega_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\tilde{y}_k(\theta_i) + \varepsilon \nu_k^{(i-1)} \left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right), \varepsilon \right) - \right. \\ &\quad \left. - I_i \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{z}_k(\theta_i), \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{y}_k(\theta_i), \varepsilon \right) \right] + \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{I}_{ik}(\theta_i) + O(\varepsilon^{n+1}) - \right. \end{aligned}$$

$$-\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \left(\tilde{z}_k|_{t=\theta_i} + \omega_k^{(i)}(0) \right) - \varepsilon^{n+1} \left(\tilde{z}_n|_{t=\theta_i} + \omega_n^{(i)}(0) \right) \Big] = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Алғашқы екі қосынды $\varepsilon \rightarrow 0$ ұмтылғанда, (2.28) бағалаудың және орта мән туралы теореманың әсерінен экспоненциалды кемиді. Ал үшінші қосынды $O(\varepsilon^{n+1})$ түрінде бағаланады. Келесі 2*) қасиет жоғарыдағы 2) қасиетке ұқсас дәлелденеді. Енді, (2.36)-(2.37) импульсті жүйені эквивалентті интегралдық теңдеулермен алмастырайық,

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s, \varepsilon) [F_y(s, \varepsilon) v(s, \varepsilon) + G_1(u, v, s, \varepsilon)] ds +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{0 < \theta_i < t} U(t, \theta_i, \varepsilon) \left(E + \frac{I_{iz}(\theta_i)}{\varepsilon} \right)^{-1} (I_{iy}(\theta_i) v(\theta_i) + Q_1(u, v, \theta_i, \varepsilon)), \quad (2.38)$$

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [f_z(s, \varepsilon) u(s, \varepsilon) + G_2(u, v, s, \varepsilon)] ds +$$

$$+ \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (E + J_{iy}(\theta_i))^{-1} (J_{iz}(\theta_i) u(\theta_i) + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon)), \quad (2.39)$$

мұндағы $U(t, \theta_i, \varepsilon)$ және $V(t, \theta_i, \varepsilon)$ төмендегі жүйенің фундаменталды матрицасы:

$$\varepsilon \frac{dU}{dt} = F_z(t, \varepsilon) U, t \neq \theta_i, \varepsilon \Delta U|_{t=\theta_i} = I_{iz}(\theta_i) U, U(s, s, \varepsilon) = E,$$

$$\frac{dV}{dt} = f_y(t, \varepsilon) V, t \neq \theta_i, \Delta V|_{t=\theta_i} = J_{iy}(\theta_i) V, V(s, s, \varepsilon) = E.$$

Бұл жүйедегі $U(t, s, \varepsilon)$ функциясы үшін

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}(t-s)\right), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

бағалауы орындалады.

Енді (2.39) теңдеу арқылы анықталған $v(t, \varepsilon)$ функциясын (2.38) өрнегіне қойсақ, онда

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t K(t, s, \varepsilon) u(s, \varepsilon) ds + W_1(u, v, t, \varepsilon),$$

мұндағы $K(t, s, \varepsilon)$ шенелген өзек, ал $W_1(u, v, t, \varepsilon)$ операторы $G(u, v, t, \varepsilon)$ функциясы сияқты екі қасиетті қанағаттандырады. Соңғы теңдеуді эквивалентті теңдеумен алмастырсақ,

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t R(t, s, \varepsilon) W_1(u, v, s, \varepsilon) ds + W_1(u, v, t, \varepsilon) = T_1(u, v, t, \varepsilon), \quad (2.40)$$

мұндағы $R(t, s, \varepsilon) = K(t, s, \varepsilon)$ өзегінің резольвентасы. Енді $u(t, \varepsilon)$ функциясын өрнектейтін (2.40) формуланы (2.39) теңдеуге қойсақ, онда

$$\begin{aligned} v(t, \varepsilon) = & \int_0^t V(t, s, \varepsilon) [f_z(s, \varepsilon) T_1(u, v, t, \varepsilon) + G_2(u, v, s, \varepsilon)] ds + \\ & \sum_{0 < \theta_i < t} V(t, \theta_i, \varepsilon) (E + J_{iy}(\theta_i))^{-1} (J_{iz}(\theta_i) T_1(u, v, \theta_i, \varepsilon) + Q_2(u, v, \theta_i, \varepsilon)) = \\ & = T_2(u, v, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.41)$$

мұндағы $T_1(u, v, t, \varepsilon)$ және $T_2(u, v, t, \varepsilon)$ операторлары $G(u, v, s, \varepsilon)$ функциясы қанағаттандыратын екі қасиетке ие. Келесі қадамда (2.40), (2.41) теңдеулерге біртіндеп жуықтау әдісін қолдансақ, онда (2.1), (2.2) есептің жалғыз шешімі бар екені және келесі бағалауды қанағаттандыратыны шығады

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon)\| &= \|z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \|v(t, \varepsilon)\| &= \|y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Нәтижеде теорема дәлелденді.

2.5 Мысал 1

Берілген

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= z(2 - z) + \varepsilon^2 y_1, & \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= 2 - z + \varepsilon^2 (y_1^2 - 2y_2), \\ y_1' &= y_2 - zy_1, & \Delta y_1|_{t=\theta_i} &= 2z + y_1^2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - y_1^3, & \Delta y_2|_{t=\theta_i} &= y_1 - \frac{1}{10} y_2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

сингулярлы ауытқыған импульстік жүйені

$$z(0, \varepsilon) = 3, \quad y_1(0, \varepsilon) = 4, \quad y_2(0, \varepsilon) = -5, \quad (2.43)$$

бастапқы шарттарымен қарастырайық, мұндағы $\theta_i = i/3, i = 1, 2, \dots, 14$. Айталық берілген есеп үшін $\varepsilon = 0$ болсын. Онда (2.42) жүйенің бірінші жолы $\tilde{z}(2 - \tilde{z}) = 0, 2 - \tilde{z} = 0$ болады. Осы алгебралық теңдеуден түбір тауып, $\tilde{z} = \varphi = 2$ орнықтылық шартын тексерейік, онда

$$\frac{\partial}{\partial z}(z(2 - z))|_{z=2} = 2 - 2z < 0.$$

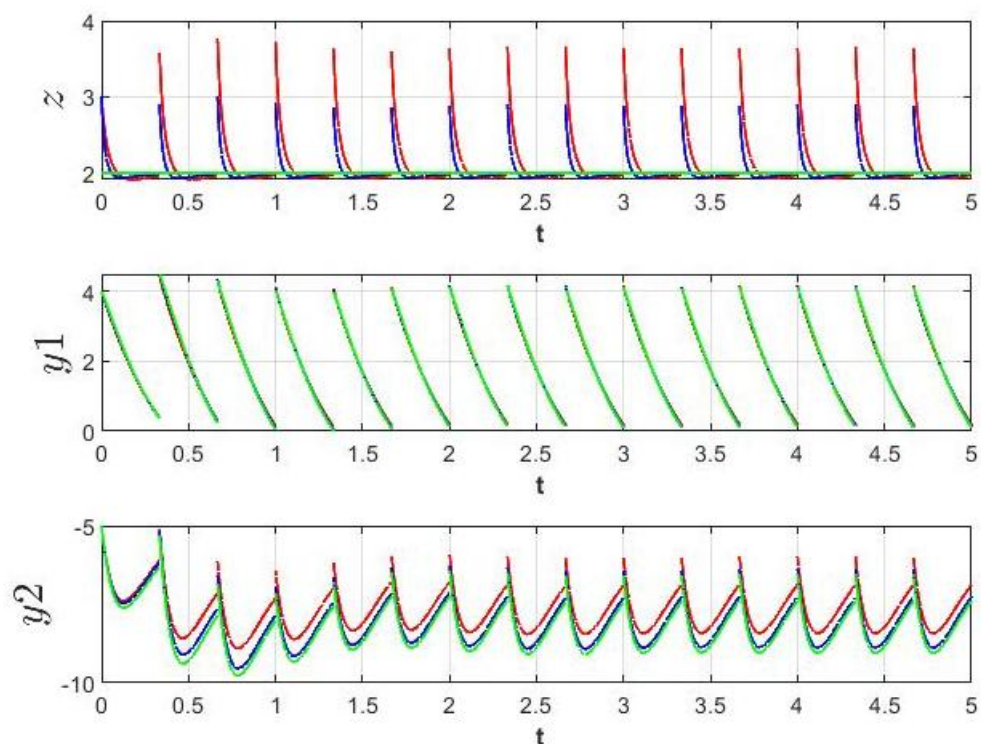
Сондықтан, $\tilde{z} = 2$ түбірі бірқалыпты асимптотикалық орнықты. Енді $\tilde{z} = 2$ (2.42) жүйеге қойсақ,

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 - z\tilde{y}_1, & \Delta\tilde{y}_1|_{t=\theta_i} &= 4 + \tilde{y}_1^2, \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1^3, & \Delta\tilde{y}_2|_{t=\theta_i} &= \tilde{y}_1 - \frac{1}{10}\tilde{y}_2, \\ \tilde{y}_1(0) &= 4, \tilde{y}_2(0) = -5. \end{aligned} \quad (2.44)$$

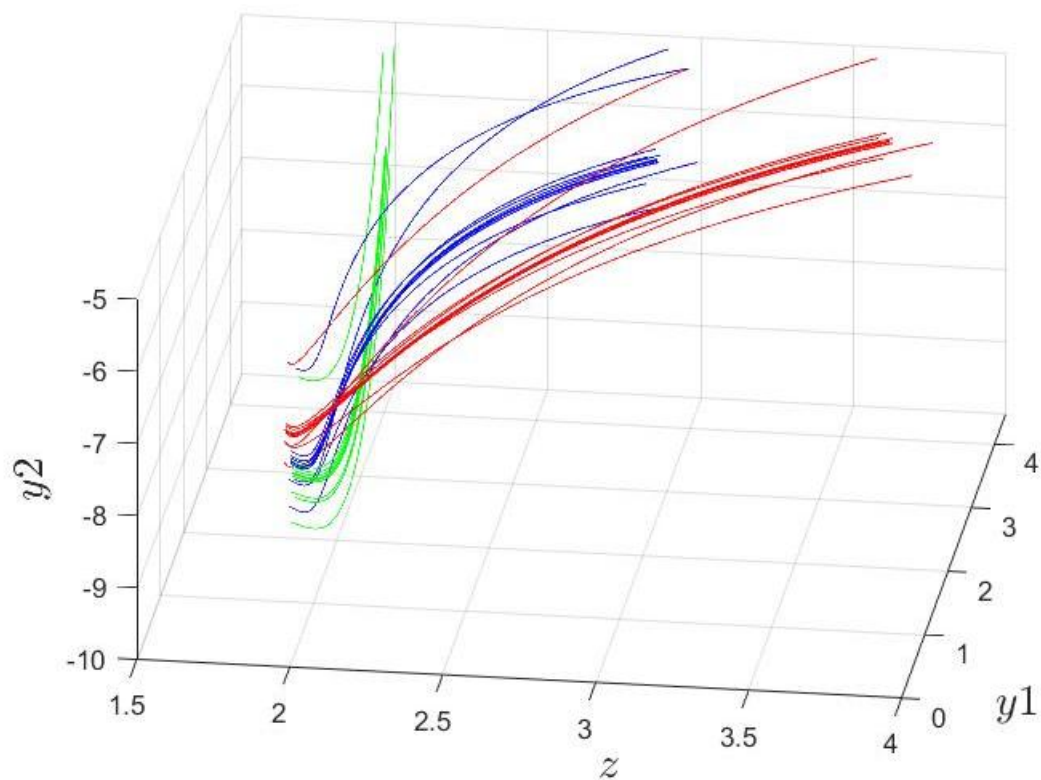
есепін аламыз. Бұл есептің жалғыз $\tilde{y}(t)$ шешімі бар. Келесі, (С6) шартын тексерейік:

$$\lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, \tilde{y}, 0)} \frac{2 - z + \varepsilon^2(y_1^2 - 2y_2)}{\varepsilon} = 0.$$

Олай болса, (2.42) жүйенің (2.43) бастапқы шартымен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t = 0$ нүктесінің маңайында шекаралық қабатқа ие. Сурет 4 кескіннің нәтижесінен бірқабытты сингулярлық құбылысы айқын көрінеді. Ал Сурет 5 нәтижесінен (2.42) жүйенің $(3, 4, -5)$ бастапқы шарттармен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда $z = 2$ ұмтылатыны көрінеді.



СУРЕТ 4. Қызыл және көк сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.005$, мәндерінде, (2.42) жүйенің $z(0, \varepsilon) = 3$, $y_1(0, \varepsilon) = 4$ және $y_2(0, \varepsilon) = -5$ бастапқы шарттармен шешімдерінің графиктері болып табылады. Ал жасыл сызықтар (2.44) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.



СУРЕТ 5. Қызыл және көк сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.005$, мәндерінде, (2.43) жүйенің $(3, 4, -5)$ бастапқы шарттармен шешімдерінің графиктерін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (2.44) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.

2.6 Мысал 2

Енді, келесі

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= z - z^3, \quad \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} = (z-1)^2 - 0.5\varepsilon y + 2\sin(\varepsilon), \\ y' &= yz - y^2, \quad \Delta y|_{t=\theta_i} = 2y + z - 1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

сингулярлы ауытқыған импульсті жүйені

$$z(0, \varepsilon) = 2, \quad y(0, \varepsilon) = 3, \quad (2.46)$$

бастапқы шарттармен қарастырайық, мұндағы $\theta_i = i/3, i=1,2,\dots,14$. Егер (2.45) жүйеден $\varepsilon=0$ алсақ, онда бірінші жол $\tilde{z} - \tilde{z}^3 = 0$ және $(\tilde{z}-1)^2 = 0$ түрінде жазылады. Соңғы өрнектен $\tilde{z} = \varphi = 1$ түбірі табылады. Осы $\varphi=1$ түбірі бірқалыпты асимптотикалық орнықты, себебі

$$\frac{\partial}{\partial z}(z - z^3)|_{z=1} = 1 - 3z^2 < 0.$$

Енді $\tilde{z} = 1$ шешімін (2.45) формуланың екінші теңдеуіне қойсақ, келесідей есеп алынады:

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= \tilde{y} - \tilde{y}^2, \quad \Delta \tilde{y}|_{t=\theta_i} = 2\tilde{y}, \\ \tilde{y}(0) &= 3. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Соңғы есептен

$$\tilde{y}(t) = \frac{\exp(t)}{\exp(t) - \sum_{k=0}^i \frac{2}{3^{i-k+1}} \exp(\frac{k}{3})}, \quad i=1,2,\dots,14.$$

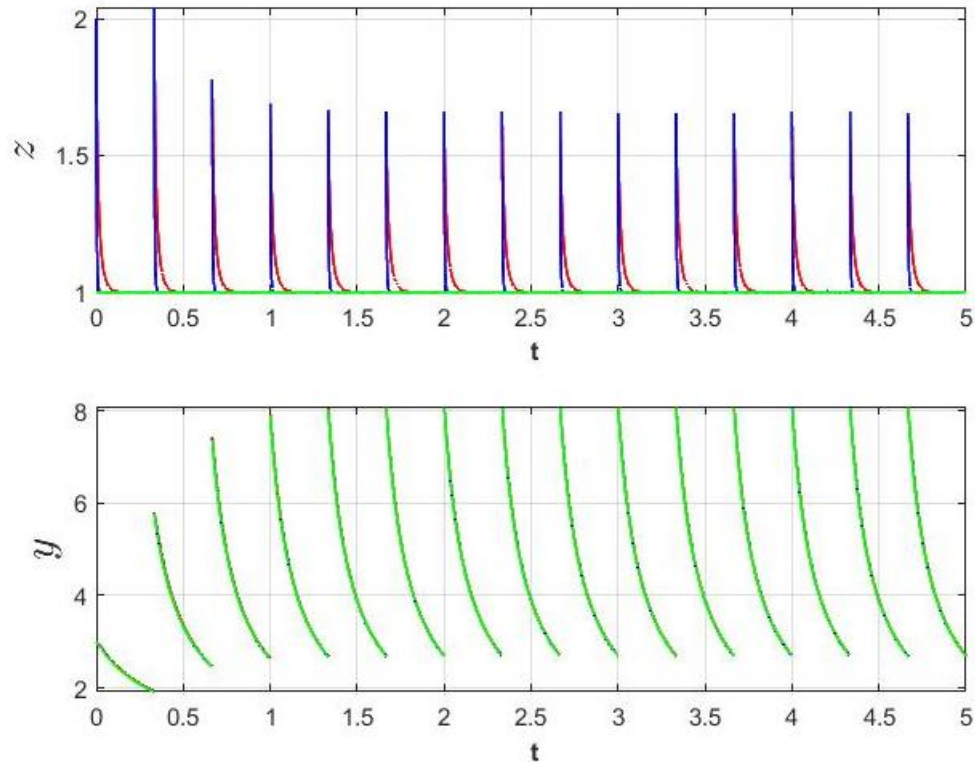
шешімі табылады.

Сонымен қатар, (C7) шартының орындалатынын келесідей тексеруге болады:

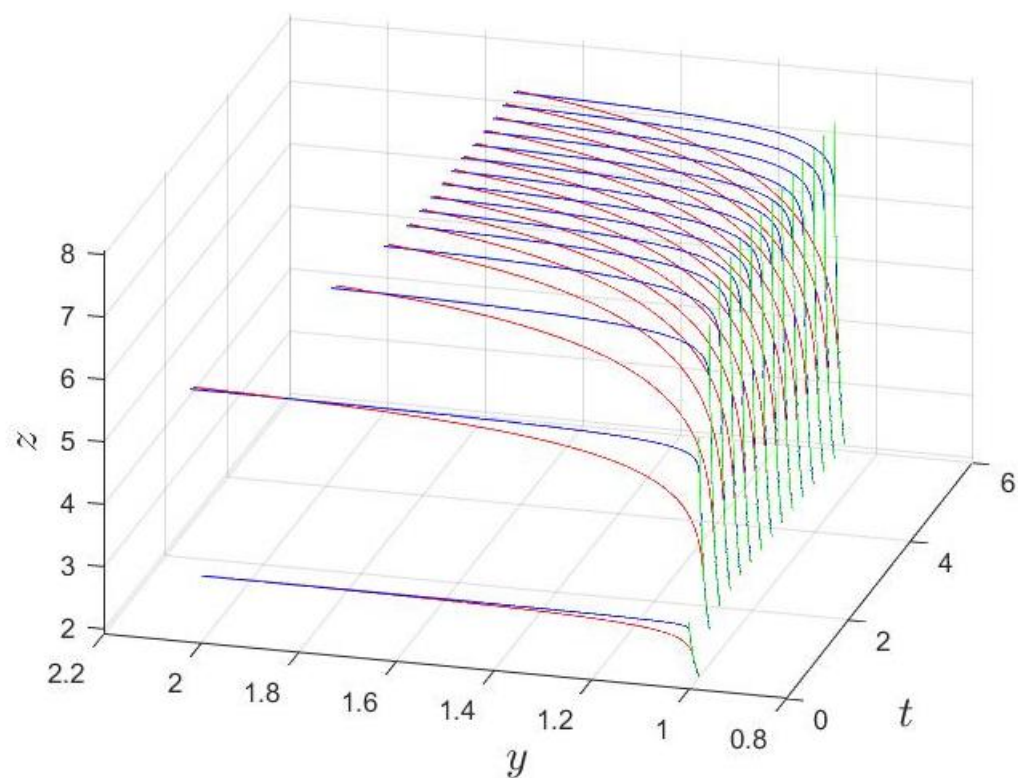
$$\lim_{(z,y,\varepsilon) \rightarrow (\varphi,\tilde{y},0)} \frac{(z-1)^2 - 0.5\varepsilon y + 2\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 2 - \frac{\exp(\theta_i)}{2\exp(\theta_i) - \sum_{k=0}^i \frac{2}{3^{i-k+1}} \exp(\frac{k}{3})} \neq 0.$$

Олай болса, (2.45) жүйенің (2.46) бастапқы шартымен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $t=0$ және $t=\theta_i, i=1,2,\dots,14$ нүктелерінің маңайында шекаралық қабатқа ие. Яғни

көпқабатты сингулярлық құбылысы байқалады. Сурет 6 кескіннің нәтижесінен көп қабатты сингулярлық құбылысы айқын көрінеді. Сурет 7 кескіннің нәтижесінен (2.45) жүйенің (2,3) бастапқы шарттармен $z(t, \varepsilon)$ шешімі $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда $z = 1$ ұмтылатыны көрінеді.



СУРЕТ 6. Қызыл, көк және жасыл сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.005$, мәндерінде, (2.45) жүйенің (2,3) бастапқы шарттармен шешімдерінің графиктерін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (2.47) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.



СУРЕТ 7. Қызыл, көк және жасыл сызықтар сәйкесінше кіші параметрдің $\varepsilon : 0.05, 0.005$, мәндерінде, (2.44) жүйенің (2,3) бастапқы шарттармен шешімдерінің графиктерін бейнелейді. Ал жасыл сызықтар (2.47) ауытқымаған есеп шешімін бейнелейді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Қарастырылып отырған диссертациялық жұмыстағы кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, зерттеу әдістері, теориялық және практикалық құндылығы түсіндірілді, сонымен қатар, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілді. Ал негізгі бөлімде сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептер қарастырылды.

Алынған нәтижелер:

-Сингулярлы ауытқыған коэффициенттері тұрақты сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

-Сингулярлы ауытқыған коэффициенттері айнымалы сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

-Сингулярлы ауытқыған сызықты емес импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

-Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық жуықтауының мүшелерін анықтайтын алгоритм құрылды;

-Импульсті функцияға қойылған шартқа байланысты бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық құбылыстар анықталды;

-Шешімнің асимптотикасының негіздемесі көрсетілді;

-Моделдеу арқылы сандық мысалдар келтірілді.

Диссертациялық жұмысты орындау барысында алынған нәтижелердің теориялық маңызы бар және [78-89] жұмыстарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Schlesinger L. "Über asymptotische darstellungen der losungen linearer differential systeme als funktionen eines parameters", *Mathematische Annalen*, (1907); 63(3): 277–300.
2. Birkhoff G.D. "On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter", *Transactions of the American Mathematical Society*, (1908); 9(2): 219–231.
3. Noaillon P. "Developpements asymptotiques dans les equations differentielles lineaires a parametre variable". *Mem. Soc. Sci. Liege*, (1912); 3(11): 197.
4. Wasow W. "Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order". *Comm. On Pure and Appl. Math.*, (1956); 9: 93–113.
5. Nayfeh A. "Perturbation Methods". New York, USA: John Wiley, (1973).
6. Tihonov A.N. "O zavisimosti reshenij differencial'nyh uravnenij ot malogo parametra". *Matematicheskij sbornik* (1948); 22(2): 193–204 (in Russian).
7. Tihonov A.N. "O sistemah differencial'nyh uravnenij sodержashhih parametry", *Matematicheskij sbornik*, (1950); 27(69):147–156 (in Russian).
8. Vishik M.I., Lyusternik L.A. "Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter multiplying the highest derivatives". *Usp.Mat. Nauk*, (1957); 12: 3–122 (in Russian), *Amer. Math. Soc. Transl.* 1962; 20(2): 239–364.
9. Vishik M.I., Lyusternik L.A. "On the initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter". *Doklady Akademii Nauk SSSR*, (1960); 132(6): 1242–1245 (in Russian).
10. Bogoliubov N., Mitropolskii Y.A. "Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations". Delhi: Hindustan Publ. Corp., (1961).
11. Vasil'eva A., Butuzov V. "Singularly perturbed differential equations of parabolic type in Asymptotic Analysis II". *Lecture Notes in Math.* Berlin: Springer-Verlag, (1983).
12. Vasil'eva A., Butuzov V., Kalachev L. "The boundary function method for singular perturbation problems". Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, (1995).
13. O'Malley R. "Singular perturbations methods for ordinary differential equations". Berlin: Springer-Verlag, (1991).
14. O'Malley R. "Introduction to singular perturbations", New York, USA: Academic Press, (1974).
15. Smith D.R. "Singular-perturbation theory". Cambridge: Cambridge University Press, (1985).
16. Eckhaus W. "Matched asymptotic expansions and singular perturbations". London: North-Holland, (1973).

17. Chang K., Howes F. "Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application", New York, USA: Springer Verlag, (1984).
18. Kevorkian J., Cole J.D. "Singular perturbation methods in applied mathematics", Berlin: Springer-Verlag, (1981).
19. Sanders J., Verhulst F. "Averaging methods in nonlinear dynamical systems". Berlin: Springer-Verlag, (1985).
20. Mishchenko E., Rozov N. "Differential equations with small parameter and relaxation oscillations", New York, USA: Plenum Press, (1980).
21. Lomov S. "Introduction to the general theory of singular perturbations", American Mathematical Society, Providence, (1992).
22. Imanaliev M.I. "Asimptoticheskie metody v teorii singulyarno vozmushchennykh integro-differencial'nykh sistem", Frunze: Ilim, (1972) (in Russian).
23. Kassymov K.A. Ob asimptotike reshenija zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi uslovijami dlja nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravnenija, sodержashhego malyj parametr, Uspehi matematicheskikh nauk, (1962); 17(5): 187–188 (in Russian).
24. Kassymov K.A. "O zadache s nachal'nym skachkom dlja nelinejnykh sistem differencial'nykh uravnenij sodержashhih malyj parametr", DAN SSSR (1968); 179(2): 275–278 (in Russian).
25. Kassymov K.A. "Asimptotika reshenija zadachi s nachal'nymi skachkami dlja sistemy differencial'nykh uravnenij giperbolicheskogo tipa s malym parametrom pri proizvodnoj". DAN SSSR, (1971); 196(2): 274–277 (in Russian).
26. Segel L.A., Slemrod M. The quasi-steady state assumption: A case study in perturbation. SIAM Review, 1989, 31: 446-477.
27. Hek G. Geometric singular perturbation theory in biological practice. Journal of Mathematical Biology, 2010, 60: 347-386.
28. Owen MR, Lewis MA. How predation can slow, stop, or reverse a prey invasion. B Math Biol 2001; 63:655 684.
29. Damiano E.R., Rabbitt R.D. A singular perturbation model of fluid dynamics in the vestibular semicircular canal and ampulla. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 307: 333-372.
30. Gondal I. On the application of singular perturbation techniques to nuclear engineering control problems. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1988, 35(5): 1080-1085.
31. Kokotovic P.V. Applications of singular perturbation techniques to control problems. SIAM Review, 1984, 26(4): 501-550.
32. Wang Y., Deng, Q.G. Fractal derivative model for tsunami traveling. Fractals, 2019, 27(1):1950017.
33. Liu F.J., Zhang T., He C.H., Tian D. Thermal oscillation arising in a heat shock of a porous hierarchy and its application. Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering, 2022, 20(3): 633-645.
34. El-Dib Y.O. Insightful and comprehensive formularization of frequency-amplitude formula for strong or singular nonlinear oscillators, Journal of Low

Frequency Noise Vibration and Active Control, 2023.
DOI:10.1177/14613484221118177.

35 He C.H., Liu C. Variational principle for singular waves. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2023, Volume 172, July:113566.

36 Wilkening J., Zhao X. Spatially quasi-periodic bifurcations from periodic traveling water waves and a method for detecting bifurcations using signed singular values. *Journal of Computational Physics*, 2023, Volume 478, April:111954.

37 Sebih M.E., Wirth J. On a wave equation with singular dissipation. *Mathematische Nachrichten*, July 2022, 295(9): DOI: 10.1002/mana.202000076.

38 Veliov, V., A generalization of the Tikhonov theorem for singularly perturbed differential inclusions, *Journal of dynamical and control systems*, 3(3) (1997), 291-319.

39 Kadalbajoo M.K., Patidar K.C., Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey, *Applied Mathematics and Computation*, 134(23) (2003), 371-429.

40 Vishik I., Lyusternik L.A. On the initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. –1960. – Vol. 132, № 6. –P. 1242-1245.

41 Kassymov K.A. On the asymptotics of the solution of the Cauchy problem with large initial conditions for nonlinear ordinary differential equations containing a small parameter // *Uspehi Mat. Nauk*. –1962.-Vol. 17, № 5. –P.

42 Kassymov K.A. The initial jump problem for non-linear systems of differential equations containing a small parameter // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. –1968. –Vol. 179, №2. –P. 275-278.

43 Kasymov K.A. Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi usloviyami dlya nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya, sodержashchego malyj parametr (in Russian). *UMN*, 1962, 140(5):187–8 17.

44 Kassymov K.A. Asimptotika resheniya zadachi s nachal'nym skachkom dlya giperbolicheskikh uravnenij 144 vtorogo poryadka, sodержashchih malyj parametr. (in Russian). *DAN SSSR*, 1970, 195(1):28–30.

45 Kassymov K.A. Asymptotics of the solutions of the problem with an initial jump for a system of differential equations of hyperbolic type with a small parameter at the derivative // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. –1971.– Vol. 196, №2. –P. 274-277.

46 Kasymov K.A. Ob asimptotike resheniya zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi usloviyami dlya nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya, sodержashchego malyj parametr. (in Russian). *UMN*, 1962, 140(5):187–8 17.

47 Kassymov K.A. Asimptotika resheniya zadachi s nachal'nym skachkom dlya giperbolicheskikh uravnenij 144 vtorogo poryadka, sodержashchih malyj parametr. (in Russian). *DAN SSSR*, 1970, 195(1):28–30.

48 Kassymov K.A. Asymptotics of solutions of Cauchy problem with an initial jump for non-linear systems of integro-differential equations with a small

parameter for the highest derivative // *Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR.* –1968.-№5. –P. 69-72.

49 Kassymov K.A. Asymptotics of the solution of a problem with initial jump for nonlinear systems of differential equations with a small parameter in the highest derivative // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* –1969.– Vol. 189, №5.

50 Kassymov K.A., Daulybaev M.K. Estimation of solutions to problems associated with linear singularly perturbed integro-differential equations. *Differential Equations*, 1999, 35(6):822–30.

51 Daulybaev M.K. The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, 41(1):49–60.

52 Abil'daev E.A., Kasymov K.A. Asymptotic estimates for the solutions of singularly perturbed boundary-value problems with initial jumps for linear differential equations. *Differents. Uravn.*, 1992, 28, No. 10:1659–1668.

53 Kassymov K.A., Nurgabyly D.N. Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2003, 55(11):1777–92.

54 Kassymov K.A., Nurgabyly D. Asymptotic estimates of solution of a singularly perturbed boundary value problem with an initial jump for linear differential equations. *Differential Equations*, 2004, 40(5):641–51.

55 Daulybayev M.K., Atakhan N. The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations. *Miskolc Math. Notes*, 2015, 16(2):747–61.

56 Daulybayev M.K., Uaissov B. Integral boundary-value problem with initial jumps for a singularly perturbed system of integrodifferential equations // *Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena.* 2020. Vol. 141, 110328.

57 Kassymov K.A., Nurgabyly D.N., Uaisov A.B. Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // *Ukrainian Mathematical Journal.* Vol. 65, No 5, 2013, pp 694-708.

58 Daulybaev M.K., Mirzakulova A.E. "Boundary value problems with initial jumps for singularly perturbed integrodifferential equations". *Journal of Mathematical Sciences*, (2017); 222(3): 214–225. doi: 10.1007/s10958-017-3294-

59 Daulybaev M.K., Mirzakulova A.E." Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations", *Journal of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, (2016); 5(2): 147–154.

60 Daulybayev M.K., Uaissov A.B. "Asymptotic Behavior of the Solutions of Boundary-Value Problems for Singularly Perturbed Integro-differential Equations", *Ukrainian Mathematical Journal*, (2020); 71(11): 1677-1691

61 M.K. Daulybayev & K.T. Konisbayeva Asymptotical convergence of solutions of boundary value problems for singularly perturbed higher-order integro-differential equations // *Quaestiones Mathematicae* 47(11) 2024. P. 2231-2246.

- 62 Akhmet M. Principles of Discontinuous Dynamical Systems// New York: Springer, 2010.
- 63 Chen W.H., Yuan G., Zheng W.X. Robust stability of singularly perturbed impulsive systems under nonlinear perturbation// IEEE T Automat Contrt 2013; 58(1):168 174.
- 64 Chen W.H., Chen F., Lu X. Exponential stability of a class of singularly perturbed stochastic time-delay systems with impulse effect// Nonlinear Anal-Real 2010; 11(5):3463 3478.
- 65 Bainov D., Covachev V., Impulsive Differential Equations with a Small Parameter, World Scientific, 1994.
- 66 Simeonov P., Bainov D. Stability of the solutions of singularly perturbed systems with impulse effect// J Math Anal Appl 1988; 136(2):575 588.
- 67 Li X, Bohner M, Wang C K. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. Automatica, 2015, vol. 52:173–178.
- 68 Kang A., Xue Y., Jin Z. Dynamic behavior of an ecoepidemic system with impulsive birth. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, vol. 345, no. 2: 783–795.
- 69 D'onofrio A. On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission. Appl. Math. Lett., 2005,18: 729-732.
- 70 Witayakiattilerd W. PID Controller Singularly Perturbing Impulsive Differential Equations and Optimal Control Problem. Advances in Mathematical Physics 2017(2):1-11, DOI:10.1155/2017/1938513.
- 71 Dishliev A., Bainov D.D. Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure. International Journal of Theoretical Physics, 1990, 29: 655-676.
- 72 Bainov D.D., Simenov P. S. Systems with Impulse Effect Stability Theory and Applications. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989.
- 73 He D, Xu L. Integro-differential inequality for stability of singularly perturbed impulsive delay integro-differential equations. Journal of Inequalities and Applications, 2009, 11 pages: ID 369185.
- 74 Akhmet M., Cag S. Chattering as a Singular Problem, Nonlinear Dynamics, 90(4) (2017), 2797–2812.
- 75 Akhmet M., Çağ S., Bifurcation analysis of Wilson-Cowan model with singular impulses, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, 10(1) (2021), 161-172.
- 76 Akhmet M., Çağ S. Tikhonov theorem for differential equations with singular impulses, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, 7(3) (2018), 291-303.
- 77 Anjum N, He J H, Ain Q T, Tian D. Li-He's modified homotopy perturbation method for doublyclamped electrically actuated microbeams-based microelectromechanical system. Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering, 2021, Vol. 19, No 4: 601 – 612.
- 78 Aviltay N., Akhmet M., Zhamanshin A. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // Carpathian Journal of Mathematics. –2024,–40, no. 3, 581 – 598.

79 Aviltay N., Dauylbayev M. Asymptotic Convergence of Solutions for Singularly Perturbed Linear Impulsive Systems with Full Singularity. *Symmetry*. 2025; 17(9):1389. <https://doi.org/10.3390/sym17091389>

80 Akhmet M., Aviltay N., Dauylbayev M., Seilova R. A case of impulsive singularity // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, [S.l.], v. 117, n. 1, apr. 2023. ISSN 2617- 4871.

81 Akhmet M., Aviltay N., Artykbayeva Zh. Asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, [S.l.], v. 112, n. 4, dec. 2021. ISSN 2617- 4871.

82 Dauylbayev M., Akhmet M., Aviltay N. Asymptotic expansion of the solution for singular perturbed linear impulsive systems // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 2024, –122(2), 14–26.

83 Aviltay N., Uaissov A. Asymptotic solutions to initial value problems for singularly perturbed quasi-linear impulsive systems. // *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 2025, 127(3).

84 Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық сипаты // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2021 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2021. –12 б.).

85 Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесі // «ФАРАБИ ӘЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2023 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2023. –5 б.).

86 Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы, Ош қ., Қырғызстан, 26-27 қыркүйек 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Ош –2024. –17 б.).

87 Асимптотическое разложение решения задачи для сингулярно возмущенных линейных импульсных системы с сингулярными импульсами // «Уфимская осенняя математическая школа—2024» халықаралық конференциясы, Уфа қ., Ресей, 2-5 қазан 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Уфа –2024. –2-том, 7-8 б.).

88 Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясы, Алматы қ., Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 жыл: баяндамалар тезистері. (Алматы–2025. 82 б.)

89 Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses// «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» X халықаралық ғылыми конференциясы», Қазақстан, Алматы, 24-26 қыркүйек, 2025.