№7-дәріс. Туындының көмегімен функцияларды зерттеу және графигін салу

$y=f(x)$ функциясы (a,b) аралығында берілсін. Егер кез келген $x_1,x_2\in(a,b)$ үшін $x_1<x_2$ теңсіздігінен $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) теңсіздігі шығатын болса, онда $f(x)$ функциясы (a,b) аралығында өседі (кемиді) дейді.

Теорема. Егер (a,b) аралығында дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы осы аралықта оң (теріс) болса, онда ол осы аралықта өседі (кемиді). Демек, өсу немесе кему интервалында функцияның туындысы таңбасын өзгертпейді.

1-мысал. $y=x^3-3x^2+1$ функцияның өсу және кему аралықтарын табу керек. Ол үшін функция туындысының таңбасының тұрақтылық интервалдарын анықтаймыз $y'=3x^2-6x$. Бұл квадрат үшмүшеліктің түбірлері $x_1=0$, $x_2=2$. Сондықтан, егер $x\in(0,2)$ аралығында $f'(x)<0$, демек $y=x^3-3x^2+1$ функциясы бұл аралықта кемиді. Ал $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ аралықтарында $f'(x)>0$, демек бұл аралықтарда функция өседі.

Теорема (экстремумның қажетті шарты). Егер дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесінде экстремумы бар болса, онда сол нүктеде $f'(x_0)=0$ болады. Осы теоремадан мынадай қорытындыға келеміз: егер x_0 нүктесінде функцияның экстремумы бар болса, онда ол нүктеде оның туындысы нөлге тең, не ол нүктеде туындысы болмауы мүмкін. Кері тұжырым әрқашан орындала бермейді.

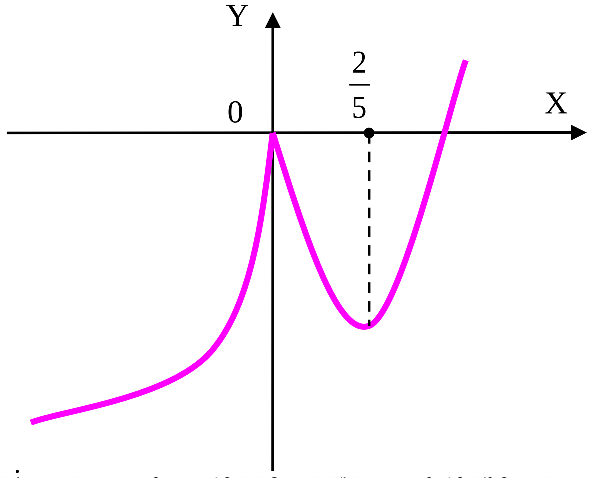
Мысалы, $y=x^3$ функциясының $x_0=0$ нүктесінде туындысы $y'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0$, ал бірақ ол нүктеде функция не максимум, не минимум қабылдамайды. $f(x)$ функциясының туындысы нөлге айналатын немесе тіпті болмайтын нүктелерді күдікті нүктелер немесе «кризистік» нүктелер деп атайды. Функцияның экстремумын осы күдікті нүктелердің арасынан іздеу керек.

Теорема (экстремумнің жеткілікті шарты). Егер $x=x_0$ нүктесінде $y=f(x)$ функциясының туындысы нөлге тең болса және x_0 нүктесінен өткенде $f'(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі экстремум нүктесі болады: 1) егер таңба «плюс»-тен «минус»-ке өзгерсе, онда x_0 – максимум нүктесі; 2) егер таңба «минус»-тен «плюс»-ке өзгерсе, онда x_0 – минимум нүктесі болады.

2-мысал. $y=(x-1)x^{2/3}$ функцияны экстремумге зерттеп, өсу және кему аралықтарын анықтау керек. Функция туындысы $f'(x)=\frac{5x-2}{3x^{1/3}}$, осыдан $\frac{5x-2}{3x^{1/3}}=0$, $x_1=\frac{2}{5}$ күдікті нүктесін табамыз. $x_2=0$ нүктесінде функцияның туындысы болмайды, сондықтан ол да күдікті нүкте. Интервалдар тәсілімен $f'(x)$-тің таңбаларын анықтаймыз. Функция $y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ барлық нүктелерде үзіліссіз, жеткіліктілік шарт бойынша $x_2=0$ максимум нүктесі, ал $x_1=\frac{2}{5}$ минимум нүктесі. $(-\infty,0)$ және $(\frac{2}{5},+\infty)$ интервалдарда функция өседі, ал $(0,\frac{2}{5})$ интервалда кемиді Зерттеу нәтижелерін таблицаға жазамыз:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
f '(x)	+	Туындысы жоқ	–	0	+

f (x)	↗	0 max	↘	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$ min	↗



Функцияның екінші ретті туындысы қолданылатын экстремумның тағы бір шартын келтірейік.

Теорема. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде бірінші және екінші туындылары бар болсын. Егер $x = x_0$ нүктесінде $y = f(x)$ функциясының бірінші туындысы нөлге тең, яғни $f'(x_0) = 0$ болса, ал екінші туындысы нөлден ерекше, яғни $f''(x_0) \neq 0$ болса, онда x_0 - экстремум нүктесі болады:

1) егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда x_0 – минимум нүктесі;

2) егер $f''(x_0) < 0$ болса, онда x_0 – максимум нүктесі болады.

Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері. Функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін экстремум нүктелерінде не кесіндісінің шеткі нүктелерінде қабылдауы мүмкін. Ең үлкен және ең кіші мәндерді табу үшін алдымен функцияның күдікті нүктелерін (не туынды нөлге тең, не туынды жоқ нүктелер) табу керек. Содан соң функцияның күдікті нүктелеріндегі және кесіндінің шеткі нүктелеріндегі мәндерін тауып, олардың ішінен ең үлкен және ең кіші мәндерді іздеу керек.

3-мысал. $y = (x-1)^2 e^{-2x}$ функциясының $[0{,}4]$ кесіндісіндегі ең үлкен жіне ең кіші мәндерін табу керек. Күдікті нүктелерді табамыз:

$f'(x) = 2(x-1)e^{-2x} - 2(x-1)^2 e^{-2x} = 2(x-1)(2-x)e^{-2x} = 0$ Осыдан $x_1 = 1, x_2 = 2$ - күдікті нүктелер. Енді функцияның күдікті нүктелердегі және шеткі нүктелердегі мәндерін табамыз: $y(1) = 0,\ y(2) = e^{-4},\ y(0) = 1,\ y(4) = 9e^{-8}$. Сонымен $f_{\text{үлкен}} = f(0) = 1,\ \ f_{\text{кіші}} = f(1) = 0$.

Функция графигінің дөңестігі, ойыстығы және иілу нүктелері

Анықтама. Егер $(a\ b)$ интервалында дифференциалданатын $y = f(x)$ қисығының барлық нүктелері сол қисыққа жүргізілген жанамадан жоғары орналасса, онда онда қисықты осы аралықта ойыс (дөңестігі төмен қараған) дейді, ал $y = f(x)$ қисығының барлық нүктелері сол қисыққа жүргізілген жанамадан төмен орналасса, онда қисықты осы аралықта дөңес (дөңестігі жоғары қараған) дейді. Қисықтың ойыс және дөңес бөлігін бөліп тұратын нүктені ***иілу нүктесі*** деп атайды.

Теорема. $y = f(x)$ функциясы $(a\ b)$ интервалында екі рет дифференциалданатын болсын. Егер осы интервалдың әрбір нүктесінде 1) $f''(x) < 0$ болса, онда функцияның графигі бұл интервалда дөңес болады; 2) $f''(x) > 0$ болса, онда функцияның графигі бұл интервалда ойыс болады

4-мысал. $y = \frac{1}{x}$ гиперболасы $(0, +\infty)$ интервалында ойыс болады, себебі $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, ал $(-\infty, 0)$ интервалында дөңес, себебі $\frac{2}{x^3} < 0$.

Теорема (иілу нүктесінің қажетті шарты). Егер x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының иілу нүктесі болса, онда бұл нүктеде функцияның екінші туындысы нөлге тең, яғни $f''(x_0) = 0$. Функцияның екінші туындысы нөлге айналатын немесе екінші туындысы болмайтын нүктелер екінші текті күдікті нүктелер деп аталады. Функцияның иілу нүктесін осы күдікті нүктелердің арасынан іздеу керек.

Теорема (иілу нүктенің жеткілікті шарты). Егер x_0 нүктесінен өткенде функцияның екінші туындысы таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі иілу нүктесі болады.

Функция графигінің асимптоталары

Анықтама. Егер қисықтың $M(x, y)$ нүктесі шексіздікке ұмтылғанда $M(x, y)$ нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда мұндай түзуді қисықтың асимптотасы дейді. Асиптоталар тік (вертикаль), көлбеу, горизонталь болып үш түрге бөлінеді.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясының $x \to x_0$ ұмтылғанда оң және сол жақты шектерінің біреуі шексіздікке тең болса, яғни $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ немесе $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ онда $x = x_0$ түзуі $y = f(x)$функцияның графигінің вертикаль асимптотасы деп аталады. Мысалы, $y = \frac{1}{x}$ функциясы үшін $x = 0$ түзуі вертикаль асимптота болады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ немесе $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ болса, онда $y = a$ түзуі $y = f(x)$ функциясының горизонталь асимптотасы деп аталады. Мысалы, $y = \frac{1}{x}$ функциясы үшін $y = 0$ түзуі горизонталь асимптота болады.

Анықтама. $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}$ және $b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx)$ теңдіктері орындалатындай k және b сандары табылатын болса, онда $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы деп аталады.

Функцияны зерттеудің жалпы сұлбасы (схемасы) және оның графигін салу

1. Функцияның анықталу облысын табу.
2. Функцияның графигінің координаттар өстерімен қиылысу нүктелерін табу және функцияның жұптығын анықтау.
3. Асимптоталарын табу. Функцияның ақырсыздықтағы жағдайын зерттеу.
4. Функцияның төңіректік экстремумын және монотондық интервалын табу.
5. Функцияның графигінің дөңестік интервалдарын және иілу нүктелерін табу.
6. Функцияның графигін сызу.

Бұл тақырыпқа есептер 2.3 пунктінде тәжірибе сабақта қарастырылады.

Әдебиеттер: 1 нег.[262-280], 11 қос. [404-421].

Бақылау сұрақтар:

1. Функцияның экстремум нүктелерінің анықтамасын келтіріңіз.
2. Функцияның экстремумын бірінші туынды арқылы табу.
3. Функцияның экстремумын екінші туынды арқылы табу
4. Иілу нүктесін табу.
5. Функцияның графигінің асимптотасын табу.