Лекция 3. Определение числовой последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Бесконечно большие последовательности и их связь с бесконечно малыми. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число e

Определение и элементарные свойства

Последовательность – это функция натурального аргумента. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$. Иначе последовательность обозначают так: $x_1, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ Число x_n называется n-м элементом (или n-м членом) последовательности. Элементы последовательности считаются различными, даже если они равные, но имеют разные номера. Например, последовательность $1, 1, \ldots$, у которой все $x_n = 1$. Последовательность может быть задана формулой, которая по заданному n позволяет вычислить значение x_n, например, $x_n = ((-1)^n + 1)/2$. Можно задавать последовательность рекуррентно, т.е. указывать закон, по которому каждый следующий элемент вычисляется по известным предыдущим, например, арифметическая $x_{n+1} = x_n + d$, или геометрическая $x_{n+1} = x_n \cdot q$ прогрессии (при этом нужно определить один или несколько первых элементов). Можно задавать последовательность описанием ее элементов, например, x_n – n-й десятичный знак после запятой у числа π.

Определение 3.1 *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от ε, такой, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $x_n \to a (n \to \infty)$, или*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

В кванторах это определение выглядит следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} = a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \equiv N_\varepsilon : \forall n \geq N \; |x_n - a| < \varepsilon$$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она сходится. В противном случае говорят, что последовательность расходится.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл предела последовательности, перепишем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в таком эквивалентном виде $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда понятно, что что с геометрической точки зрения равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что все члены последовательности, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, зависящего от ε, находятся в ε окрестности точки a. Вне этой окрестности находится, быть может, лишь конечное число элементов, а именно, те x_n, номера n которых меньше, чем $N(\varepsilon)$.

В терминах окрестностей определение предела можно переформулировать следующим образом.

Определение 3.2 *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ числа a найдется такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все* *члены последовательности принадлежат этой окрестности, т.е.*

$$\forall U_\varepsilon(a) \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n \in U_\varepsilon(a)$$

Пример 1

Пусть $x_n = a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Такая последовательность называется стационарной. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 2

Пусть $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Оно выполняется, если только $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[b]$ означает целую часть числа b. Тогда из неравенства $n \geq N$ следует, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, а значит, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Таким образом, мы показали по определению, что число $a = 0$ является пределом последовательности x_n.

Пример 3

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда получим, что неравенство

$$|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

справедливо, если только $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Поэтому достаточно взять $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$.

Замечание 3.1

При доказательства равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ по определению не требуется находить наименьший номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Достаточно указать лишь какойнибудь номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого $|x_n - a| < \varepsilon$.

Отрицание определения предела

Число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такое положительное ε, что для любого N существует $n \geq N$, такое, что $|x_n - a| \geq \varepsilon$, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \forall N \quad \exists n \geq N: \quad |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

В этой записи число N не может зависеть от ε, а n зависит от N.

В терминах окрестностей получаем, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такая окрестность числа a, вне которой находится бесконечно много элементов последовательности x_n.

Теперь легко можем сформулировать в кванторах определение расходящейся последовательности:

$$\forall a \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0 : \forall N \exists n \geq N : |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Пример 4

Докажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится. Зададим произвольное $a \in \mathbb{R}$ и положим $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Если $a \geq 0$, то вне окрестности $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ находятся элементы последовательности с нечетными номерами, а если $a < 0$, то с четными номерами. Итак, какое бы N мы ни взяли, найдется $n \geq N$ (например, $n = 2N + 1$, если $a \geq 0$ и $n = 2N$, если $a < 0$), для которого справедливо неравенство $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1 *(единственность предела). Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

□ Доказательство. Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a'$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a''$ и $a' \neq a''$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a' - a''| > 0$. Тогда найдутся номера N' и N'', такие, что для всех $n \geq N'$ справедливо неравенство $|x_n - a'| < \varepsilon$, а для всех $n \geq N''$ справедливо неравенство $|x_n - a''| < \varepsilon$.

Положим $N = \max\{N', N''\}$. Тогда при $n \geq N$ неравенства $|x_n - a'| < \varepsilon$ и $|x_n - a''| < \varepsilon$ должны выполняться одновременно, что невозможно, поскольку при выбранном ε окрестности $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon\ )$ и $(\ a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon\ )$ не имеют общих точек. ■

Определение 3.3 *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \leq M$.*

Определение 3.4 *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \geq m$.*

Определение 3.5 *Последовательность называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу.*

Легко показать, что ограниченность последовательности $\{x_n\}$ равносильна тому, что

$$\exists A > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq A$$

С геометрической точки зрения ограниченность последовательности означает, что все ее элементы находятся в некоторой окрестности нуля.

Теорема 2 *(необходимое условие сходимости). Если последовательность сходится, то она ограничена.*

□ Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon = 1$ и найдем номер N такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Среди конечного числа элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ найдем наибольший x_{n_1} и наименьший x_{n_2}. Тогда, очевидно, неравенство $m \equiv \min(a-1, x_{n_2}) \leq x_n \leq M \equiv \max(a+1, x_{n_1})$ имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$.■

□ Приведем еще одно доказательство. Для $\varepsilon = 1$ найдем номер N, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Пусть $A = \max(|a|+1, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|)$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справедливо неравенство $|x_n| \leq A$. ■

Обратное к доказанной теореме утверждение не имеет места, т.е. *из ограниченности последовательности не следует сходимость*. В самом деле, как было показано в примере 4, последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится. Вместе с этим она ограничена, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|(-1)^n| \leq 1$.

В кванторах определение неограниченной последовательности выглядит следующим образом

$$\forall A \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > A$$

Из теоремы 2 мгновенно вытекает

Следствие 1 *(достаточное условие расходимости). Если последовательность неограничена, то она расходится.*

Пример 5

Пусть $x_n = q^n$, где $|q| > 1$. Покажем, что эта последовательность неограничена. Для доказательства будем применять известное неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha, (\alpha > -1, n \in \mathbb{N})$, которое легко может быть доказано методом математической индукции.

Положим $\alpha = |q| - 1 > 0$. Зададим произвольное $A > 0$. В силу неравенства Бернулли

$$|q^n| = |q|^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha > A,$$

если только $n > \dfrac{A}{\alpha}$. Итак, для любого $A > 0$ найдется номер $n = \left[\dfrac{A}{\alpha}\right] + 2$, такой, что $|q^n| > A$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена, а значит, в силу следствия из теоремы 2 , она расходится.

Теорема 3 *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.*

□ Доказательство. Эта теорема мгновенно вытекает из неравенства $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием теоремы, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда для $n \geq N$ также будет выполняться и неравенство $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. ■

Замечание 3.2

Утверждение, обратное к данной теореме, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится, и в то же время $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Легко, однако, видеть, что теорема 3 может быть обращена при $a = 0$. В самом деле, достаточно воспользоваться равенством $||x_n| - 0| = |x_n - 0| = |x_n|$.

Предельный переход и неравенства

Теорема 4 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $x_n \le y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Тогда $a \le b$.

□ Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_1, такой, что для всех $n \ge N_1$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда, в частности, следует, что $x_n > a - \varepsilon$, $n \ge N_1$. Далее, для этого же ε найдем номер N_2, такой, что для всех $n \ge N_2$ выполнено неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$, из которого следует, что $y_n < b + \varepsilon$, $n \ge N_2$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \ge N$, пользуясь условием теоремы, получим $a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon$. Отсюда имеем $a - \varepsilon < b + \varepsilon$, или $a < b + 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $a \le b$. ■

Приведем еще одно доказательство теоремы 4.

□ Предположим, что $a >$ b. Тогда положим $\varepsilon = (a - b)/2$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_1)$ и $|y_n - b| < \varepsilon$ $(n \ge N_2)$. Если взять $n \ge \max(N_1, N_2)$, то получим $x_n > a - \varepsilon = \dfrac{a + b}{2} = b + \varepsilon > y_n$, что противоречит условию $x_n \le y_n$ теоремы. ■

Замечание 3.3

Из условия $x_n < y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не следует, что $a < b$. Действительно, пусть, например, $x_n = 0$, $y_n = \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $x_n < y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема 5 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *и число* $b < a$. *Тогда существует такой номер* N, *что при всех* $n \ge N$ *справедливо неравенство* $x_n > b$.

□ Доказательство. Положим $\varepsilon = a - b > 0$ и найдем номер N, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \ge N$. Отсюда для $n \ge N$ получим $x_n > a - \varepsilon =$ b. ■

Теорема 6 *(теорема о трех пределах). Пусть три последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *такие, что* $x_n \le y_n \le z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то последовательность* $\{y_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

□ Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_1)$ и $|z_n - a| < \varepsilon$ $(n \ge N_2)$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \ge N$ будем иметь $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$. Отсюда следует, что $|y_n - a| < \varepsilon$, а это и означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Пример 6

Пусть $x_n = q^n$. В примере 5 было показано, что при $|q| > 1$ последовательность x_n неограничена и, следовательно, расходится. Далее, при $q = -1$ имеем $x_n = (-1)^n$. В примере 4 мы показали, что эта последовательность также расходится. Если $q = 1$, то $x_n = 1(n = 1, 2, \ldots)$. Это - стационарная последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Также и при $q = 0$ получаем $x_n = 0(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Осталось рассмотреть случай $0 < |q| < 1$. Выберем такое $\alpha > 0$, что $|q| = \dfrac{1}{1 + \alpha}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0\right)$. Тогда, в силу неравенства Бернулли $(1 + \alpha)^n \ge 1 +$ $n\alpha(n = 1, 2 \ldots)$, имеем

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha} \leq \frac{1}{n\alpha}$$

Полагая $a_n = 0, c_n = \dfrac{1}{n\alpha}, b_n = |q^n|\,(n = 1, 2, \ldots)$, и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, из теоремы о трех пределах получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$, а из замечания к теореме 3 следует, что и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Предельный переход и арифметические операции

Теорема 7 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

3) если $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $b \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

□ Доказательство.

1) Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon/2\,(n \geq N_1)$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2\,(n \geq N_2)$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь $a - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_n < a + \dfrac{\varepsilon}{2}, b - \dfrac{\varepsilon}{2} < y_n < b + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Складывая эти два неравенства, получим $a + b - \varepsilon < x_n + y_n < a + b + \varepsilon$, или $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ $(n \geq N)$.

2) Воспользуемся тем, что сходящаяся последовательность ограничена. Тогда найдется такое $A > 0$, что $|x_n| \leq A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Будем использовать неравенство

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| = |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a|\,. \tag{2.1}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_2, такой, что $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$ для всех $n \geq N_2$. Если $b = 0$, то второе слагаемое справа в (2.1) равно нулю, в этом случае полагаем $N_1 = 1$. Если же $b \neq 0$, то найдем такой номер N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$, в силу (1), будем иметь

$$|x_n y_n - ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и тем самым доказано утверждение 2).

3) Достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$, а затем применить 2). Имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|\,|b|}$$

Поскольку, в силу теоремы 3, $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b|$, то для $\varepsilon' = \dfrac{|b|}{2} > 0$ найдем такой номер N_1, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $||y_n| - |b|| < \varepsilon' = \dfrac{|b|}{2}$, т.е. $\dfrac{|b|}{2} < |y_n| < \dfrac{3|b|}{2}$.

Поэтому для $n \geq N_1$ получим

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{|y_n - b|}{\frac{1}{2}|b|^2}$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдем номер N_2, такой, что при всех $n \geq N_2$ справедливо неравенство $|y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. ■

В частном случае $y_n = b(n = 1, 2, \dots)$ утверждение 2) теоремы 7 принимает такой вид:

$$\lim_{n\to\infty} bx_n = b \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Это означает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пример 7

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при любом $a > 0$.

При $a = 1$ это равенство очевидно. Пусть $a > 1$. Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Тогда, в силу неравенства Бернулли, имеем $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, откуда $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$, т.е.

$$0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, то, по теореме о трех пределах, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$$

Отсюда следут, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) + \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

В случае $0 < a < 1$ обозначим $b = \frac{1}{a} > 1$. Как уже доказано ранее, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Поэтому, в силу п. 3) теоремы 7 , получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 8

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Тогда при $n \geq 2$ получим

$$n = (1 + \alpha_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha_n^k \geq C_n^2 \alpha_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)\alpha_n^2$$

откуда $\alpha_n \le \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$, то из неравенства $0 \le \alpha_n \le \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, в силу теоремы о трех пределах, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) + \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1$$

Итак, остается показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} < \varepsilon$, если только $n > \dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1$. Полагая $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$, согласно определению предела, получаем требуемое равенство.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 3.6 *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_n = x_n - a$ бесконечно малая. Используя это, можно дать следующее равносильное определение предела.

Определение 3.7 *Число* a *называется пределом последовательности* $\{x_n\}$*, если последовательность* $\{x_n - a\}$ *бесконечно малая.*

Следует, однако, понимать, что при таком определении предела нужно отдельно определять понятие бесконечно малой последовательности, а именно, бесконечно малой называть такую последовательность $\{x_n\}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такой, что при любом $n \ge N$ справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Теорема 8 *(свойства бесконечно малых последовательностей).*
1). Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.
2). Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

□ Доказательство. Свойство 1) следует из арифметических свойств пределов (теорема 7).

Докажем 2). Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, а $\{x_n\}$ ограниченная последовательности. Обозначим $\beta_n = \alpha_n x_n$. Поскольку $\{x_n\}$ ограничена, то существует такое $A > 0$, что $|x_n| \le A$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь тем, что $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, найдем такой номер N, что при всех $n \ge N$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$. Тогда для $n \ge N$ получим $|\beta_n| = |\alpha_n|\,|x_n| \le A\,|\alpha_n| < \varepsilon$, а это и означает, что последовательность $\{\beta_n\}$ бесконечно малая. ■

Бесконечно большие последовательности

Выше мы показали, что каждая сходящаяся последовательность ограничена. Иначе говоря, всякая неограниченная последовательность расходится. Мы выделим некоторые специальные классы неограниченных последовательностей.

Определение 3.8 *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$, если для любого действительного числа M найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от M, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.*

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к $-\infty$, если для любого действительного числа M найдется номер N, зависящий, вообще говоря, от M, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $x_n < -M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, или $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Определение 3.9 *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если модули ее элементов стремятся к $+\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty\right)$, т.е. если для любого M найдется номер N, такой, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n| > M$. Обозначают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, или $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Ясно, что каждое из условий $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Обратное неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n n$ стремится к ∞, но не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$.

Напомним, что неограниченная последовательность $\{x_n\}$ – это такая, что для любого M найдется такой номер n, что $|x_n| > M$. Ясно, что каждая бесконечно большая последовательность неограничена, но обратное неверно. Например, последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями устанавливает следующее

Утверждение 1 *Пусть $x_n \neq 0 (n = 1, 2, \ldots)$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая в том и только в том случае, когда последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ бесконечно малая.*

□ Доказательство этого утверждения сразу следует из эквивалентности двух следующих неравенств: $|\alpha_n| < \varepsilon$ и $|x_n| = \left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Например, если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда для $n \geq N$ будем иметь $|\alpha_n| = \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, а это и означает, что последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая. ■

Доказательство обратного утверждения аналогично.

Некоторые виды неопределенностей

Пусть $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$. Тогда легко убедиться в том, что $x_n + y_n \to +\infty$ и $x_n y_n \to +\infty$. Однако, об $x_n - y_n$ ничего определенного сказать нельзя.

Так, например, если $x_n = n^2 \to +\infty$, $y_n = n \to +\infty$, то

$$x_n - y_n = n^2 - n \geq n \qquad (n \geq 2)$$

и

$$x_n - y_n \to +\infty.$$

Для $x_n = n$, $y_n = n^2$ имеем

$$x_n - y_n = n - n^2 \leq -n \quad \text{и} \quad x_n - y_n \to -\infty.$$

Если же $x_n = n \to +\infty$, $y_n = n + (-1)^n \to +\infty$, то последовательность $x_n - y_n = (-1)^{n+1}$ не имеет предела.

Говорят, что разность двух стремящихся к $+\infty$ последовательностей составляет неопределенность вида $[(+\infty) - (+\infty)]$. Другой вид неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ - отношение двух стремящихся к ∞ последовательностей, т.е. $\dfrac{x_n}{y_n}$, где $x_n \to \infty, y_n \to \infty$. В самом деле, для $x_n = n^2, y_n = n$ имеем $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty$, $\dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$. Если же $x_n = (2 + (-1)^n)\, n, y_n = n$, то отношение $\dfrac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^n$, очевидно, не имеет предела.

Так как обратная к бесконечно большой является бесконечно малой последовательностью, то получаем еще такие виды неопределенностей: $[0 \cdot \infty] = \left[\dfrac{1}{\infty} \cdot \infty\right] = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Приведите соответствующие примеры.

2.3 Лемма Кантора о вложенных отрезках

Эта лемма играет чрезвычайно важную роль в анализе. Ее доказательство основано на применении теоремы о существовании верхней грани, которое, в свою очередь, базируется на аксиоме полноты множества действительных чисел. По сути дела, эта лемма эквивалентна аксиоме полноты. Это означает, что при аксиоматическом определении системы действительных чисел вместо аксиомы полноты можно было бы постулировать справедливость леммы Кантора.

Лемма Кантора (о вложенных отрезках) *Пусть последовательность отрезков* I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *такова, что* $I_{n+1} \subset I_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Тогда существует точка* c, *принадлежащая всем отрезкам* I_n. *Если дополнительно предположить, что длины* $|I_n|$ *отрезков* I_n *стремятся к нулю при* $n \to \infty$, *то такая точка* c *единственная.*

$\square$ Доказательство. Пусть $I_n = [a_n, b_n]$. Покажем, что для любых m, n справедливо неравенство $a_n \leq b_m$. В самом деле, если $a_n > b_m$, то отсюда следует, что отрезки $[a_n, b_n]$ и $[a_m, b_m]$ не имеют общих точек, что невозможно, т. к. по условию леммы отрезок с большим номером содержится в отрезке с меньшим номером.

Обозначим через E множество всех левых концов отрезков I_n, т.е. $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Как только что показано, это множество E ограничено сверху, например, числом b_1. Обозначим

$c = \sup E$. Из определения верхней грани следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $a_n \le c$. С другой стороны, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $c \le b_n$, поскольку каждое b_n, как показано выше, является верхней границей множества E, а c - наименьшая из всех верхних границ множества E.

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $a_n \le c \le b_n$, а это и означает, что $c \in I_n$.

Предположим теперь, что длины отрезков I_n стремятся к нулю, и докажем, что полученная точка единственна. В самом деле, если предположим, что существуют две различные точки $c' < c''$, принадлежащие всем отрезкам I_n, то получим $a_n \le c' < c'' \le b_n (n = 1, 2, \dots)$. Отсюда следует, что $b_n - a_n \ge c'' - c' > 0$, а это противоречит тому, что длины $b_n - a_n$ отрезков I_n стремятся к нулю. ■

Замечание 3.4

Если в условии леммы Кантора длины отрезков не стремятся к нулю, то легко показать, что целый отрезок $[c, c']$, где $c = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$, $c' = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$, содержится в каждом I_n.

Замечание 3.5

Лемма Кантора теряет силу, если в ее формулировке отрезки заменить интервалами. В самом деле, легко видеть, что последовательность вложенных друг в друга интервалов $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ не имеет общих точек, поскольку $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \varnothing$.

Монотонные последовательности

Определение 3.10 *Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (возрастающей), если $x_{n+1} \ge x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если $x_{n+1} > x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то такая последовательность называется строго возрастающей. Если $x_{n+1} \le x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, то такая последовательность называется невозрастающей (убывающей), а если $x_{n+1} < x_n$, то последовательность называется строго убывающей. Последовательность называется монотонной, если она либо невозрастающая, либо неубывающая, и строго монотонной, если она либо строго возрастает, либо строго убывает.*

Теорема 9 *Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Тогда*

1. *если $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится;*
2. *если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

□ Доказательство. Ограниченность сверху данной последовательности $\{x_n\}$ означает, что ограничено сверху множество $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Обозначим $c = \sup E$ и покажем, что $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Так как $c = \sup E$, то для каждого n справедливо неравенство $x_n \le c$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $x_N > c - \varepsilon$. Но из монотонности последовательности $\{x_n\}$ следует, что для любого $n \ge N$ также будет справедливо неравенство $x_n > c - \varepsilon$. Итак, $c - \varepsilon < x_n \le c < c + \varepsilon$ при любом $n \ge N$, т.е. $|x_n - c| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то для любого M найдется такой номер N, что $x_N > M$. Но из монотонности последовательности $\{x_n\}$ следует, что $x_n > M$ при любом $n \geq N$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

Из этой теоремы мгновенно вытекает

Теорема 10 *(критерий сходимости монотонно возрастающей последовательности). Монотонно возрастающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Аналогично предыдущей доказывается следующая

Теорема 11 *Пусть $\{x_n\}$ монотонно убывающая последовательность.*
Тогда

1. *если $\{x_n\}$ ограничена снизу, то она сходится;*
2. *если $\{x_n\}$ неограничена снизу, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Как и выше, отсюда вытекает

Теорема 12 *(критерий сходимости монотонно убывающей последовательности). Монотонно убывающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.*

Ясно, что возрастающая последовательность ограничена снизу (например, первым элементом последовательности), а убывающая последовательность ограничена сверху. Поэтому предыдущие утверждения можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема 13 *(критерий сходимости монотонной последовательности). Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Замечание 3.6

Без предположения монотонности эта теорема теряет силу. В самом деле, последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но, как было показано выше, расходится. Это оказалось возможным потому, что данная последовательность не является монотонной.

Как критерий Коши, так и критерий сходимости монотонной последовательности, позволяют доказывать сходимость последовательности, но не дают способов нахождения предела. На практике часто можно облегчить нахождение предела, зная лишь о его существовании и используя свойства сходящихся последовательностей. Продемонстрируем это на примере.

Пример 9

Пусть $x_n = \dfrac{n}{2^n}$. Покажем, что эта последовательность убывающая. Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1,$$

откуда, учитывая, что $x_n > 0$, следует $x_{n+1} \leq x_n$. Кроме того, так как $x_n > 0$, то эта последовательность ограничена снизу. По теореме существования предела монотонной и ограниченной последовательности, данная последовательность имеет предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, а по теореме о пределе произведения

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{n}{2^n} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}a.$$

Теперь из равенства $a = \frac{1}{2}a$ следует, что $a = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Следует обратить особое внимание на то, что подобные рассуждения справедливы лишь при условии, что существует $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Если это условие не выполнено, то можно получить неверный результат. Именно, если $x_n = (-1)^n$, то $x_{n+1} = (-1)^{n+1} = -x_n$, откуда $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = -\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -a$. Из этого равенства получим, что $a = 0$. Но этот вывод неверный, т. к. наши рассуждения были проведены в предположении, что последовательность $(-1)^n$ сходится, что, как известно, неверно.

Пример 10

Пусть $a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где в качестве x_1 можно взять любое положительное число. Если мы покажем, что существует положительный предел этой последовательности $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, то, исходя из арифметических свойств пределов, получим $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$, откуда $2c^2 = c^2 + a$, т.е. $c^2 = a$. Учитывая, что $c > 0$, имеем $c = \sqrt{a}$.

Итак, осталось показать, что данная последовательность имеет положительный предел. Так как $x_1 > 0$, то $x_2 > 0$, а значит, $x_3 > 0$ и т.д. По индукции получаем, что все $x_n > 0$. Это, в частности, означает, что данная последовательность определена корректно. Докажем более точное неравенство – оценку снизу для x_n. Для этого перепишем данное рекуррентное равенство, определяющее последовательность, в таком виде:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

Но поскольку для любого $y > 0$ справедливо неравенство $y + \frac{1}{y} \geq 2$ (оно равносильно тому, что $(y-1)^2 \geq 0$), то имеем

$$x_{n+1} = \sqrt{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь, учитывая, что $x_n \geq \sqrt{a}, n = 2, 3, \ldots$, получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = 1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

так что $x_{n+1} \leq x_n, n = 2, 3, \ldots$, т.е. данная последовательность убывающая, начиная со второго номера. Выше было показано, что она ограничена снизу числом $\sqrt{a}$. По теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности получаем, что существует $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и, т. к. все $x_n \geq \sqrt{a}$, то и $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{a} > 0$.

Замечание 3.7

В рассмотренном примере последовательность $\{x_n\}$ определена рекуррентно равенством $x_{n+1} = f(x_n)$, где функция f обладает тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Тогда для нахождения предела такой последовательности нам нужно было решить уравнение $c = f(c)$. Этот стандартный прием удобен для вычисления пределов последовательностей, заданных рекуррентно. Однако следует помнить, что прежде чем использовать этот прием, нужно доказать само существование предела. Если этого не сделать, то можно получить неверный результат.

Число e

Теорема 14 *Последовательность* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

□ ДоказАтельство. Достаточно показать, что x_n возрастает и ограничена сверху. По формуле бинома Ньютона

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n\frac{1}{n^n} =$$

$$= \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Если мы теперь вместо n подставим $n+1$, то количество слагаемых справа увеличится на одно положительное, и в каждом слагаемом все выражения в скобках также увеличатся. В самом деле, $1 - \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{k}{n+1}, 1 \leq k \leq n-1$, а учитывая, что все слагаемые положительные, получим, что $x_{n+1} \geq x_n$. Таким образом, последовательность возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху воспользуемся тем, что каждое выражение в скобках не превосходит 1. Тогда получим

$$x_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$=1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1/2^n}{1-\frac{1}{2}}\right) \leq 1+2=3.$$

Итак, мы показали, что данная последовательность возрастающая и ограничена сверху. По теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности получаем, что она сходится. ■

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из доказательства теоремы видно, что $e \leq 3$. Приближенное значение этого числа равно $e \approx 2,718281828\ldots$

Теорема 15 *(другое представление числа e). Пусть последовательность* $y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

□ Доказательство. Для доказательства используем представление $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, которое мы получили при доказательстве предыдущей теоремы

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = y_n$$

Если мы еще покажем, что $y_n \leq e$, то, по теореме о трех пределах, из неравенства $x_n \leq y_n \leq e$ получим утверждение нашей теоремы.

Зафиксируем k и пусть $n > k$. Тогда

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) >$$

$$> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Поскольку k фиксировано, а $n > k$, то в полученном неравенстве можем перейти к пределу при $n \to \infty$. Левая часть при этом стремится к e, а правая стремится к y_k. Поэтому получаем

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]=y_k$$

т.е. при любом натуральном k справедливо неравенство $y_k \leq e$. ■

Используя эту теорему, нетрудно доказать, что число e иррационально.