Мысал 11. Эйлер-Пуассон интегралының мәнін пайдаланып, төмендегі интегралды есептеңіз:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)\ e^{-(ax^2+2bx+c)}dx, \qquad a>0.$$

Шешуі. $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$ түрлендіруінде $\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}=t$ алмастыруын жасасақ,

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(At^2+2bt+C)\ e^{-t^2}dt$$

теңдігін аламыз. Мұнда

$$A=\frac{a_1}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \qquad B=\frac{b_1a-a_1b}{a^2}e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \qquad C=\frac{a^2c_1-2abb_1+a_1b^2}{a^2\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}d(-t^2)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot e^{-t^2}d(-t^2)=$$ бөліктеп интегралдасақ,

$$=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=e^{-t^2}d(-t^2) & v=e^{-t^2}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\left(t\cdot e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A,B,C мәндерін орнына қойып, есептің жауабын аламыз:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(At^2+2bt+C)\ e^{-t^2}dt=A\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2B\cdot 0+C\cdot\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\left(a+2b^2\right)a_1-4abb_1+2a^2c_1\right)\cdot e^{-\frac{ac-b^2}{a}}.$$

Мысал 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n xdx$ интегралын Эйлер интегралы арқылы өрнектеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\cos^{n-1} x d\left(\sin^2 x\right) =$$

$\sin x = \sqrt{t}$ деп алайық, мұнда $t > 0$. Онда t-ң өзгеру аралығы 0-ден 1-ге дейін болады.

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Ендеше берілген интеграл $\frac{m+1}{2} > 0,\ \frac{n+1}{2} > 0 \Rightarrow m > -1,\ n > -1$ орындалса жинақталады.

Мысал 13. Есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^6 x dx$.

Шешуі. Алдыңғы мысалдың шешіміне сүйенсек,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^6 x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{5+1}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \frac{1}{2} B\left(3, \frac{7}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2!\cdot 5!!}{11!!}\cdot 2^3 = \frac{8}{693}.$$

4. Интегралдың бірқалыпты жинақтылығы.

Анықтама. Әрбір $y \in Y$ үшін $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ интегралы жинақты болсын. Егер $I(y)$ интегралы

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0):\ (\forall \eta > \delta)\ (\forall y \in Y)$$

$$\left| I(y) - \int_a^{\eta} f(x,y)dx \right| = \left| \int_{\eta}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

шарттарын қанағаттандырса, онда параметрден тәуелді $I(y)$ меншіксіз интегралы y бойынша Y жиынында *бірқалыпты жинақты* деп аталады.

Анықтама. Әрбір $y \in Y$ үшін жинақты

$$I^*(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\lambda \to +0} \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx$$

интегралы төмендегі теңсіздіктерді

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta(\varepsilon) > 0)\ (0 < \lambda < \delta(\varepsilon))\ (\forall y \in Y):$$

$$\left| I^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x,y)dx \right| = \left| \int_{b-\lambda}^{b} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

қанағаттандырса, онда параметрден тәуелді $I^*(y)$ меншіксіз интегралы y бойынша Y жиынында *бірқалыпты жинақты* деп аталады.

Параметрден тәуелді меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақтылығының критерийі:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

интегралы Y жиынында бірқалыпты жинақталады сонда, тек қана сонда, егер

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta}^{+\infty} f(x,y)dx \right| = 0 .$$

Интегралдың бірқалыпты жинақтылығы үшін *Вейерштрасс белгісі.*

Егер $\exists g(x) \underset{x \in [a;+\infty)}{\geq} 0:$ 1) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралы жинақты ;

2) $|f(x,y)| \leq g(x)$, $\forall y \in Y$

онда $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ меншіксіз интегралы Y жиынында бірқалыпты жинақталады.

Интегралдың бірқалыпты жинақтылығы үшін *Дирихле белгісі.*

Әрбір бекітілген $\alpha \in E$ үшін $f,\quad g,\quad g'_x$ функциялары x айнымалысы бойынша $[a;+\infty)$ жиынында үзіліссіз және төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

1) $g(x;\alpha)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$ бірқалыпты α -ға қатысты, $\alpha \in E$;

2) $g'_x(x;\alpha)$ функциясының әрбір бекітілген $\alpha \in E$ үшін таңбасы тұрақты,
$x \in [a;+\infty)$;

3) $f(x;\alpha)$ функциясының әрбір $\alpha \in E$ үшін алғашқы бейнесі шектелген, яғни

$$\exists M > 0: \quad \left|\int\limits_a^x f(t;\alpha)dt\right| \le M, \qquad \forall x \in [a;+\infty), \qquad \forall \alpha \in E$$

Осы шарттар орындалғанда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)dx$$

интегралы α бойынша E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Интегралдың бірқалыпты жинақтылығы үшін *Абель белгісі.*

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)dx$ интегралы E жиынында бірқалыпты жинақталса;

2) $g(x;\alpha)$ функциясы x бойынша монотонды және шектелген, яғни,

$$\exists M > 0: \qquad \forall x \ge a, \quad \forall \alpha \in E \qquad |g(x;\alpha)| \le M$$

болса,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)dx$$

интегралы α бойынша E жиынында бірқалыпты жинақталады.

Мысал 14. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha x} dx$ интегралының

а) кез келген $0 < a \le \alpha \le b$ аралығында бірқалыпты жинақты;

б) $0 \le \alpha \le b$ аралығында жинақтылығы бірқалыпсыз болатынын көрсетіңіз.

Шешуі. а) Интеграл астындағы функцияны бағаласақ:

$$|f(x,\alpha)| = \left|\frac{\alpha}{e^{\alpha x}}\right| \le \frac{b}{e^{ax}} = g(x), \quad \forall \alpha \in [a;b]$$

шығады.

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{b}{e^{ax}} dx$$

интегралы салыстыру белгісі бойынша жинақталады, себебі Тейлор формуласын қолдансақ :

$$\frac{b}{e^{ax}} = \frac{b}{1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \ldots + \frac{(ax)^n}{n!} + o(x^n)} \le \frac{2b}{1 + a^2 x^2}$$

бағалауы орындалады. Ендеше Вейерштрасс белгісі бойынша берілген интеграл
$[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақталады.

б) $[0;b]$ аралығында жинақтылығы бірқалыпсыз екенін көрсету үшін критерийді пайдаланайық.

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{\alpha \in [0;b]} \left| \int_\eta^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{\alpha \in [0;b]} \left(e^{-\alpha x} \Big|_{xx=+\infty}^{x=\eta} \right) =$$

$$= \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{\alpha \in [0;b]} e^{-\alpha \eta} = \lim_{\eta \to +\infty} 1 = 1 \ne 0$$

Шектің мәні нөлге тең болмағандықтан интегралдың жинақтылығы бірқалыпсыз болады.

Мысал 15. Есептеңіз: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^{n+1}} dx$, мұндағы n - оң бүтін сан, $\lambda > 0$.

Шешуі. $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} arctg \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \qquad (***)$$

теңдігін пайдаланайық. $f(x,\lambda) = \frac{1}{x^2+\lambda}$, $f(x,\lambda) = \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^{n+1}}$ функциялары $0 < \varepsilon \le \lambda < +\infty$, $0 \le x < +\infty$ облысында үзіліссіз болады. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)} dx$ интегралы $\lambda > 0$ үшін салыстыру белгісі бойынша жинақталады. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^{n+1}} dx$ интегралы Вейерштрасс белгісі бойынша $\varepsilon \le \lambda < +\infty$ жартылай интервалында бірқалыпты жинақталады, себебі:

$$\frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^{n+1}} \le \frac{1}{\left(x^2+\varepsilon\right)^{n+1}}, \quad x \ge 0$$

теңсіздігі ақиқат. Ал, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\varepsilon\right)^{n+1}} dx$ интегралы салыстыру белгісі бойынша $2(n+1) > 1$ болғандықтан жинақталады. Сондықтан $\varepsilon \le \lambda < +\infty$ жартылай интервалында, ал, $\varepsilon > 0$ -кез келген болғандықтан $0 < \lambda < +\infty$ интервалында λ параметрі бойынша (***) теңдігін n рет дифференциалдауға болады. Бір рет дифференциалдасақ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^{\frac{3}{2}}}$$

аламыз. n рет дифференциалдау нәтижесінде төмендегі теңдікке келеміз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\lambda\right)^{n+1}} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^n \cdot \sqrt{\lambda}}.$$

Мысал 16. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ интегралы $E = [b; +\infty)$, (b 0) жиынында α бойынша бірқалыпты жинақталатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Интегралды бірқалыпты жинақтылықққа Дирихле белгісімен зерттейік.

1) $g(x;\alpha)=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$, $g(x;\alpha)=\frac{1}{x}$ функциясы α-дан тәуелсіз. Сондықтан $g(x;\alpha)\underset{x\to+\infty}{\to}0$ бірқалыпты α-ға қатысты, $\alpha\in E$;

2) $g'_x(x;\alpha)=-\frac{1}{x^2}$ функциясының әрбір бекітілген $\alpha\in E$ үшін таңбасы тұрақты, дәлірек айтқанда, таңбасы теріс, $x\in[a;+\infty)$;

3) $f(x;\alpha)=\sin\alpha x$ функциясының әрбір $\alpha\in E$ үшін алғашқы бейнесі шектелген, яғни,

$$F(x;\alpha)=\int_0^x f(t;\alpha)dt=\int_0^x \sin\alpha t dt=\frac{\cos\alpha x-1}{\alpha}$$

десек, онда $|F(x;\alpha)|\le\frac{2}{b},\quad \forall x\in[0;+\infty)$ және $\forall\alpha\ge b$. Сондықтан Дирихле белгісі бойынша берілген интеграл $E=[b;+\infty),\quad (\ b\ \square\ 0\ )$ жиынында α-ға қатысты бірқалыпты жинақталады.