**Дәріс 9**

**Функцияның туындысы. Біржақты туындылар. Функцияның дифференциалдануы. Дифференциал. Туындының және дифференциалдың геометриялық мағыналары.**

## Туынды. Туындының механикалық және геометриялық мағынасы

$f$ функциясы $x_0$ нүктесінде және оның қандайда бір маңайында анықталған функция болсын. $x_0$ - нүктесіндегі аргумент өсімшесі $\Delta x = x - x_0$, ал оған сәйкес келетін функция өсімшесі:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

арқылы белгіленсін.

**Анықтама.** *Егер* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *нақты мәнді шегі бар болса, онда шектің мәнін* $y = f(x)$ ***функциясының*** $x_0$ ***- нүктесіндегі туындысы*** *дейді де*

$$y'(x_0), \quad f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{dy(x_0)}{dx}$$

*символдарының бірімен белгіленеді.*

Сонымен,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

немесе

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Егер (1) - шек $+\infty, -\infty$ немесе $\infty$ болса, онда $f$ функциясының $x_0$ - нүктесінде **ақырсыз туындысы бар** дейді.

Егер (1) - теңдіктегі шек $\Delta x \to 0, \Delta x > 0$ немесе $x \to x_0, x > x_0$ жағдайында қарастырылса, онда шек (егер ол бар болса) $f$ функциясының $x_0$ нүктесіндегі **оң жақты туындысы**, ал $\Delta x \to 0, \Delta x < 0$ немесе $x \to x_0, x < x_0$ жағдайында қарастырылса, онда **сол жақты туындысы** деп аталады да, олар сәйкес $f_0'(x_0)$, $f_c'(x_0)$ символдары арқылы белгіленеді.

Функцияның $x_0$ нүктесінде туындысы бар болуы үшін:

1) $\exists f_0'(x_0)$, $\exists f_c'(x_0)$; 2) $f_0'(x_0) = f_c'(x_0)$ шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті. Онда

$$f_0'(x_0) = f_c'(x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

**Теорема.** Егер $f(x)$ функциясының $x_0$ нүктесінде ақырлы туындысы бар болса, онда $f$ функциясы осы $x_0$ - нүктесінде үзіліссіз болады.

**Ескерту.** Функция нүктеде үзіліссіз болса да, оның бір жақты ақырлы туындылары болмауы да мүмкін. Мысал ретінде мынадай функцияны қарастырайық:

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f_0'(0) = +\infty, \quad f_c'(0) = -\infty$$

Сонымен, функция нүктеде үзіліссіз болғанымен, ол нүктеде функцияның туындысы болмауы мүмкін екен.

**Салдар.** Егер $x_0$ нүктесі $f$ функциясының үзіліс нүктесі болса, онда осы нүктеде $f$ - тің ақырлы туындысы болмайды.

**Туындының механикалық және геометриялық мағынасы**

**Лездік жылдамдық.** $S = f(t)$ материялық нүктенің түзудегі қозғалысының заңдылығын өрнектейтін функция болсын.

$t$ уақытқа дейін материялық нүкте $f(t)$, ал $t+\Delta t$ уақытқа дейін $f(t+\Delta t)$ жол жүреді. Сондықтан $t$-ден $t+\Delta t$ уақытқа дейін ол $f(t+\Delta t)$- $f(t)$ жол жүреді. Бұл жолды қозғалыс уақыты $\Delta t$-ға бөліп, қозғалыстың $t$-ден $t+\Delta t$-ға дейінгі уақыт аралығындағы орташа жылдамдығын табамыз:

$$v_{орт} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Бұл жылдамдықтың $\Delta t \to 0$ жағдайдағы шегі (егер бар болса) қозғалыстың $t$ уақыт кезеңіндегі лездік жылдамдығы деп аталады:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

$f'(t)$ туынды материялық нүктенің $t$ мезгіліндегі жылдамдығы болады.

**Жанама туралы есеп.** $(a,b)$ аралығында үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін. Оның $\Gamma$ - графигінен $A = (x, f(x))$ нүктесін белгілеп осы нүктедегі қисыққа жүргізілген жанаманы анықтайық. Ол үшін $\Gamma$ - қисығынан басқа $B = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ нүктесін аламыз. $A$ мен $B$ нүктелері арқылы өтетін, $x$ **- тің өсу жағына қарай бағытталған** $S$ түзуін **қиюшы** деп атаймыз. Оның $x$ - өсінің оң бағытымен арасындағы бұрышын $\beta$ деп белгілейік және

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2},\ \Delta x = AC,\ \Delta y = CB,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta .$$

Егер $\Delta x \to 0$, онда $\Delta y \to 0$ және $B$ нүктесі $\Gamma$ қисығы бойымен $A$ - нүктесіне ұмтылады. Осыдан $\beta$ бұрышы қандайда бір $\alpha$ мәніне $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \alpha \neq -\frac{\pi}{2}\right)$ ұмтылса, онда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} tg\beta = tg\alpha$$

шегі бар және ол $f$ функциясының $x$ нүктесіндегі туындысына тең:

$$f'(x) = tg\alpha .$$

Керісінше, егер $f'(x)$ туындысы бар болса, онда $\beta \to \alpha = arctgf'(x)$ .

**Анықтама.** $\Gamma$ - *қисығының* $A = (x, f(x))$ *нүктесіндегі* ***жанамасы*** *деп* $A \in \Gamma$ *және* $B = (x+\Delta x, f(x+\Delta x)) \in \Gamma$ *нүктелері арқылы өтетін* ***(*** $x$ ***- тің өсу жағына қарай бағытталған)*** $S$ *- қиюшының* $\Delta x \to 0$ *ұмтылатын* $T$ *- түзуін айтады.*

Аналитикалық геометриядан $(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін бұрыштық коэффициенті $k = tg\alpha$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ болатын түзу теңдеуі

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

түрінде жазылатыны белгілі. Олай болса, $y = f(x)$ қисығының $A(x_0, y_0)$ нүктесіндегі жанама теңдеуі

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

түрінде, ал $A(x_0, y_0)$ нүктедегі **нормаль** теңдеуі.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (4)$$

түрінде жазылады.

**Анықтама.** $x$ нүктесінде ақырлы туындысы бар функция **дифференциалданатын** функция деп аталады.

**Теорема 1.** Егер $u(x), v(x)$ $x$-нүктесінде дифференциалданатын функциялар болса, онда осы нүктеде олардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі $(v(x) \neq 0)$ дифференциалданады және

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

4) $(k \cdot u)' = ku'$, $k$ - нақты сан.

**Негізгі элементар функциялардың туындыларының кестесі:**

1. $c' = 0$;
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $x' = 1$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a > 0, a \neq 1$, $\left(e^x\right)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13. $(shx)' = chx$;

14. $(chx)' = shx$;

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$;

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$;

**Функция дифференциалы**

**<u>Анықтама.</u>** *Егер* $f$ *функциясының* $x$ *- нүктесіндегі* $\Delta y$ *- өсімшесі* $\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$ *(5) түрінде жазылатын болса, онда берілген* $f(x)$ *функциясы* $x$ *- нүктесінде дифференциалданады дейді (* $A - \Delta x$ *-ке тәуелді емес, бірақ* $x$ *- ке тәуелді).*

**Теорема.** $f$ функциясы $x$ - нүктесінде дифференциалданатын функция болу үшін $x$ - нүктесінде функцияның ақырлы туындысының болуы қажетті және жеткілікті, теңдіктегі бірінші қосылғыш $\Delta x$-ке пропорционал және оған сызықты тәуелді, ал екінші қосылғыш $0(\Delta x)$, $\Delta x$ - ке салыстырғанда кішкене болу реті жоғары шексіз аз шама $(\Delta x \to 0)$, яғни $\Delta x \to 0$ жағдайда екінші қосылғыш $\Delta x$ қарағанда жылдамырақ нөлге ұмтылады. Осыған байланысты $A\Delta x = f'(x)\Delta x$ шамасын функция өсімшесінің **бас мүшесі** дейді және ол **функцияның дифференциалы** деп аталады да $dy$ арқылы белгіленеді.

Сонымен, $dy = df(x) = f'(x)dx$ .

Егер $u(x)$, $\nu(x)$ $x$-нүктесінде дифференциалданатын функциялар болса, онда $d(u \pm \nu) = du \pm d\nu$ ; $d(u \cdot \nu) = ud\nu + \nu du$; $d(cu) = cdu$, $c$ - тұрақты сан; $d\left(\dfrac{u}{\nu}\right) = \dfrac{\nu du - ud\nu}{\nu^2}$, $\nu \neq 0$. теңдіктен $\Delta y \approx dy$ немесе:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \quad \Delta x \to 0$$

жуық теңдігін жазуға болады және оны жуықтап есептеулерге қолданылады.