

## Дәріс 8

Квадраттық үшмүшеліктерді  
қамтитын функцияларды интегралдау.  
Рационал функцияларды интегралдау.  
Иррационал және тригонометриялық  
▶ функцияларды интегралдау

Тлеулесова А.М.

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды  
интегралдау.

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$$

1)  $ax^2 + bx + c$  квадрат үшмүшелігіндегі  $a$  коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

2) интегралға  $x + \frac{b}{2a} = t$ ,  $dx = dt$  алмастыруын енгіземіз;

3) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{x+3}{x^2-2x+1-8-1} dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2-9} dx =$$

**1-мысал.**

$$\int \frac{t+1+3}{t^2-9} dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2-9} + 4 \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9} -$$

$$4 \int \frac{dt}{3^2-t^2} = \left| t^2-9=u \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 4 \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| + C =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = t^2 - 9 = (x-1)^2 - 9 = x^2 - 2x - 8 \\ t = x - 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 8| - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+2}{4-x} \right| + C$$

# Рационал функцияларды интегралдау

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m}$$

Егер  $n < m$  болса,  $R(x)$  – дұрыс бөлшек деп, ал  $n \geq m$  болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз. Мысалы,

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - x + 1} = x^2 - 3x - 2 + \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}$$

*Қарапайым бөлшектерді интегралдауды  
қарастырайық.*

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} +$$

$$+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_tx + N_t}{(x^2 + px + q)^t} + \dots$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} = x - 2 + \frac{2x + 6}{x^3 + 1} = x - 2 + 2 \frac{x + 3}{x^3 + 1}$$

$$\frac{x+3}{x^3+1} = \frac{x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{x+3}{x^3+1} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{2x-7}{3(x^2-x+1)}$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x + 4}{x^3 + 1} dx = \int \left[ x - 2 + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-7}{x^2-x+1} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x+1| -$$

$$- \frac{2}{3} \left[ \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} - 6 \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln(x^2-x+1) + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

# Кейбір иррационал функцияларды интегралдау

$\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$  түріндегі интегралдар  $t = \sqrt[n]{x}$  алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3}{t^3 + 1} dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt$$

$$= 4 \int \left( \frac{t^5 + t^2}{t^3 + 1} - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt =$$

$$\frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln|t^3 + 1| + C = \left| t = \sqrt[4]{x} \right| = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} + 1| + C$$

## Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_I(t) dt, \text{ мұндағы } R_I(t) - \text{рационал функция.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$



# Бекіту сұрақтары

- ▶ Құрамында квадрат үшмүшелігі бар функцияны интегралдау.
- ▶ Рационал функциялар қалай интегралданады?
- ▶ Әмбабап алмастыру деп қандай алмастыруды айтамыз?
- ▶ Иррационал функцияларды интегралдау.