Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Сандық дифференциалдау

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. Ақырлы айырымдар жуықтаулары.

2. Орталық айырымдар жуықтаулары.

3. Орталық емес ақырлы айырымдар жуықтаулары.

4. Ақырлы айырымдар жуықтауындағы қателіктер.

Мақсаты

Дифференциалдау амалын сандық түрде шешу

және есептеу формулаларын қорыту.

Ақырлы айырымдар жуықтаулары

$f(x)$ функциясын Тейлор қатарына жіктелуі.

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (a)$
$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (b)$
$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (c)$
$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (d)$
$\boldsymbol{f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (e)}$
$\boldsymbol{f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots \quad (f)}$
$\boldsymbol{f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \cdots \quad (g)}$
$\boldsymbol{f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \cdots \quad (h)}$

Бірінші орталық айырымдар жуықтаулары

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (\mathbf{1})$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (\mathbf{2})$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (\mathbf{3})$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (\mathbf{4})$$

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

1-кесте. $\mathcal{O}(h^2)$ орталық ақырлы айырымдар жуықтауының коэффициенттері

Бірінші орталық емес ақырлы айырымдар жуықтаулары

Оң жақ айырымдар	Сол жақ айырымдар
$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{(5)}$	$f'(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{(6)}$
$f''(x) = \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{(7)}$	$f''(x) = \dfrac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \qquad \mathbf{(8)}$

2a-кесте. $\mathcal{O}(h)$ оң жақ ақырлы айырымдар жуықтауының коэффициенттері

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$hf'(x)$	-1	1			
$h^2f''(x)$	1	-2	1		
$h^3f'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

2b-кесте. $\mathcal{O}(h)$ сол жақ ақырлы айырымдар жуықтауының коэффициенттері

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$hf'(x)$				-1	1
$h^2f''(x)$			1	-2	1
$h^3f'''(x)$		-1	3	-3	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Екінші орталық емес ақырлы айырымдар жуықтаулары

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3}f'''(x) + \frac{h^4}{2}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad \mathbf{(8)}$$

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2hf'(x)$	-3	4	-1			
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''(x)$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

3a-кесте. $\mathcal{O}(h^2)$ оң жақ ақырлы айырымдар жуықтауының коэффициенттері

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				1	-4	3
$h^2f''(x)$			-1	4	-5	2
$2h^3f'''(x)$		3	-14	24	-18	5
$h^4f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

3b-кесте. $\mathcal{O}(h^2)$ сол жақ ақырлы айырымдар жуықтауының коэффициенттері

Ақырлы айырымдар жуықтауындағы қателіктер

h	Алты таңбалы дәлдік	Сегіз таңбалы дәлдік
0.64	0.380 160	0.380 609 11
0.32	0.371 035	0.371 029 39
0.16	0.371 711	0.368 664 84
0.08	**0.368 281**	0.368 076 56
0.04	0.368 75	0.367 831 25
0.02	0.37	**0.3679**
0.01	0.38	0.3679
0.005	0.40	0.3676

4-кесте. $(e^{-x})''$-ты $x = 1$ кезінде орталық

ақырлы айырымдар жуықтауы $\boldsymbol{e^{-1} = 0.367\,879\,44}$

Ричардсон экстраполяциясы

$$G = g(h_1) + \; ch_1^p \qquad (i) \qquad\qquad G = g(h_2) + \; ch_2^p \qquad (j)$$

жуықтау қателік

$$G = \frac{(h_1/h_2)^p g(h_2) - g(h_1)}{(h_1/h_2)^p - 1} \qquad \mathbf{(9)} \qquad\qquad h_2 = h_1/2 \qquad\qquad G = \frac{2^p g(h_1/2) - g(h_1)}{2^p - 1} \qquad \mathbf{(10)}$$

4-кесте мәлімет бойынша

$$g(0.64) = 0.380\,610 \qquad g(0.32) = 0.371\,035$$

$$G = \frac{2^2 g(0.32) - g(0.64)}{2^2 - 1} = \frac{4(0.371\,035) - 0.380\,610}{3} = 0.367\,843$$

$\mathcal{O}(h^4)$ қателігімен $(e^{-x})''$-ты жуықтауы

Есепті шығару үлгісі

Біркелкі орналасқан деректер нүктелері

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

$x = 0$ және 0.2 кезінде $f'(x)$ және $f''(x)$мәндерін $\mathcal{O}(h^2)$ ақырлы айырымдар жуықтауы арқылы есептеңіз.

Шешуі. 3а-кестедегі оң жақ айырымдар кестесінен

$$f'(0) = \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{2(0.1)} = \mathbf{0.967}$$

$$f''(0) = \frac{2f(0) - 5f(0.1) + 4f(0.2) - f(0.3)}{(0.1)^2} = \mathbf{-3.77}$$

1-кестедегі орталық айырымдар жуықтауы

$$f'(0.2) = \frac{-f(0.1) + f(0.3)}{2(0.1)} = \mathbf{0.4135}$$

$$f''(0.2) = \frac{f(0.1) - 2f(0.2) + f(0.3)}{(0.1)^2} = \mathbf{-2.17}$$

Қорытынды

1. Ақырлы айырымдар жуықтау формулалары.
2. Орталық айырымдар жуықтаулары.
3. Орталық емес ақырлы айырымдар сұлбалары.
4. Ақырлы айырымдар жуықтауындағы қателік.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numerical methods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.