

ЛЕКЦИЯ-10

§ 5.4. Гильберт-Шмидт теоремасы

Егер $K(x, s)$ симметриялық ядросы үшін $\int_a^b K(x, s)\omega(s)ds = 0$ теңдігін қанағаттандыратындай $\omega(x) \neq 0$ функциясы табылмаса, онда $K(x, s)$ ядросы тұйық деп, ал ондай $\omega(x)$ функциясы табылса, онда $K(x, s)$ ядросы тұйық емес деп аталады.

1 теорема (Шмидт). Меншікті функциялар жүйесі тұйық болуы үшін ядроның тұйық болуы қажетті де, жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x, s)$ ядросы тұйық емес ядро болсын, яғни $\omega(x) \neq 0$ функциясы табылып,

$$\int_a^b K(x, s)\omega(s)ds = 0$$

шарты орындалсын. Сонғы өрнекті $\varphi_k(x)$ функциясына көбейтіп, сонан соң x бойынша 0-ден b -ға дейін интегралдасақ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, s)\omega(s)ds \right) \varphi_k(x)dx = \int_a^b \omega(s) \left\{ \int_a^b K(x, s)\varphi_k(x)dx \right\} ds = \\ &= \int_a^b \omega(s) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} ds = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_k(s)\omega(s)ds, \end{aligned}$$

яғни $\{\varphi_k\}$ жүйесі тұйық болмайды.

Керісінше $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі тұйық болмасын, яғни $\omega(x) \neq 0$ табылып, олар үшін

$$\int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx = 0 \quad (81)$$

теңдігі орындалсын. Жоғарыда дәлелденген тұжырымнан

$$K_4(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} \varphi_k(x)\varphi_k(s).$$

Енді осы теңдікті $\omega(x)\omega(s)$ -ке көбейтіп, одан кейін s пен x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап, (81) теңдігін ескерсек,

$$\int_a^b \int_a^b K_4(x, s)\omega(x)\omega(s)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} \int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx \int_a^b \varphi_k(s)\omega(s)ds = 0.$$

Ал $K_4(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)K_2(t, s)dt$ болғандықтан, соңғы теңдеуден

$$0 = \int_a^b \int_a^b K_4(x, s) \omega(s) \omega(x) ds dx = \int_a^b \left\{ \int_a^b K_2(x, t) \omega(x) dx \right\} \times \\ \times \left\{ \int_a^b K_2(t, s) \omega(s) \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K_2(x, t) \omega(x) dx \right\} dt.$$

Сондықтан $\int_a^b K_2(x, t) \omega(x) dx = 0$ және дәл осылай $\int_a^b K(x, t) \omega(x) dx = 0$, яғни теорема дәлелденді.

Егер $f(x) = \int_a^b K(x, s) h(s) ds = Kh \left(h(x) \in L_2[a, b] \right)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $K(x, s)$ ядросы арқылы өрнектелген дейді.

2 теорема (Гильберт- Шмидт). $K(x, s) \in L_2(a, b)$ ядросы арқылы өрнектелетін кез келген $f(x)$ функциясы сол ядроның меншікті функциялары бойынша орташа жинақты Фурье қатарына жіктеледі.

Дәлелдеуі. Алдымен $K(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_k(x)\}$ арқылы $h(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктейік:

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(x) \quad (h_n = (h, \varphi_n)).$$

Бессель теңсіздігін пайдалансақ, $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \leq \int_a^b h^2(x) dx$ қатарының жинақты екенін көреміз. Одан кейін $f(x)$ үшін Фурье қатарын

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \quad (82)$$

түземіз, мұндағы, $f_n = (f, \varphi_n) = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n} (h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n}$.

Олай болса,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x). \quad (83)$$

$h(x) \in L_2[a, b]$ болғандықтан $f(x) \in L_2[a, b]$ болады. Сондықтан Рисс-Фишер теоремасы бойынша (83) қатары орташа жинақты.

Енді (83) қатарының қосындысы $f(x)$ -ке тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x)$$

деп алайық. Онда

$$\begin{aligned} f(x) &= S_m(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b h(s)\overline{\varphi}_n(s)ds = \\ &= \int_a^b \left[K(x,s) - \sum_{n=1}^m \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(s) \right] h(s)ds = \int_a^b K^{(n)}(x,s)h(s)ds = K^{(n)}h. \end{aligned}$$

Жоғарыдағы §5.3-тегі лемманың салдарын пайдалансақ, $m \rightarrow \infty$ ұмтылған жағдайында $\|f - S_m\| = \|K^{(n)}h\| \rightarrow 0$ болады. Демек,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x),$$

яғни теорема дәлелденді.

Ескерту. Гильберт-Шмидт теоремасында $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі толық деп ұйғарылмайды.

3 теорема. Егер симметриялық ядро $\int_a^b |K(x,s)|^2 ds < A$ шартын қанағаттандырса, онда (83) қатары бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы (78) теңсіздігін пайдаланып, (83) қатарының қалдық бөлігін бағаласақ,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq A \sum_{k=n}^{n+p} h_k^2.$$

Егер $\sum_{k=n}^{n+p} h_k^2$ қатарының жинақтылығын пайдалансақ, соңғы теңсіздіктен барлық $n > N$ және $\forall p > 0$ үшін

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| < \varepsilon$$

екенін көреміз, бұдан Коши белгісін ескеріп, (82) қатарының бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейміз.

Гильберт-Шмидт теоремасының салдары.

1 салдар. Қайталанатын $K_2(x,s)$ ядросы меншікті функциялар $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі бойынша

$$K_2(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x)\varphi_k(s) \quad (84)$$

түріндегі қатарға жіктеледі.

Расында, қайталанушы ядро анықтамасы бойынша

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt.$$

Егер $K(x, s) \in L_2(D)$ болса, онда 2-теорема бойынша

$$K_2(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k \varphi_k(x), \quad h_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k.$$

$K_2(x, s)$ үшін алынған жіктелудің оң жағындағы h_k -ны оның мәнімен ауыстырсақ, (84) теңдігі шығады.

2 салдар. Ядроның резольвентасы сол ядроның меншікті функциялары бойынша қатарға жіктеледі:

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n - 1} \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(s).$$

Расында λ -ның кіші мәндері үшін

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$$

екенін дәлелдегенбіз, ал қайталанатын ядроның жіктелу қасиеті бойынша формулаларды пайдалансақ,

$$\begin{aligned} R(x, s; \lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \dots + \lambda^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \dots = \\ &= \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(s)}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{n-1} + \frac{\varphi_2(x) \varphi_2(s)}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{n-1} + \dots + \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^{n-1} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}. \end{aligned}$$

Біртекті емес симметриялық ядролы

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

теңдеуінің шешімін анықтайық. $g(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ деп белгілейік. Егер

$\varphi(x) \in L_2(a, b)$ болса, онда $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$, мұндағы, C_k – тұрақты шамалар.

Сондықтан

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \quad (86)$$

(85) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ функциясы (86) теңдеуінің оң жағымен ауыстырсақ,

$$f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(s) \right] ds,$$

бұдан

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) &= \int_a^b K(x,s) f(s) ds + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_a^b K(x,s) \varphi_k(s) ds = \\ &= \int_a^b K(x,s) f(s) ds + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \end{aligned}$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \varphi_k(x) = \int_a^b K(x,s) f(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (87)$$

Бұл өрнектің екі жағындағы $\varphi_k(x)$ функцияларының коэффициенттерін салыстырып,

$$C_k = \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \quad (\lambda_k \neq \lambda, k=1,2,\dots)$$

екенін аламыз. C_k ($k=1,2,\dots$) коэффициенттері мәндерін (86) теңдігіне қойып,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

Шмидт формуласын аламыз.

Егер $\lambda = \lambda_m$ рангісі r еселі меншікті мән болса, онда $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+r-1}$ коэффициенттерін (87) теңдігі бойынша анықтай алмаймыз, оның үстіне сол (87) теңдігінен

$$f_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k=m, m+1, \dots, m+r-1)$$

екені шығады. Сондықтан бұл жағдайда (85) теңдігінің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \lambda \sum_{k=m}^{m+r-1} C_k \varphi_k(x) + \lambda \sum_{k=m+r}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

түрінде жазылады.

Енді ядроларды кластарға бөлейік. Гильберт-Шмидт теоремасын қолдансақ,

$$\int_a^b K(x,s)h(s)ds = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k \varphi_k(x)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктің екі жағын да $q(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)h(s)q(x)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k q_k.$$

Егер $q(x) = h(x)$ болса, онда

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b K(x,s)h(s)h(x)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k^2.$$

Міне, осы теңдік ядроны кластарға бөлудің негізі болады. Бұл теңдік бойынша барлық меншікті мәндердің оң болуының қажетті де жеткілікті шарты – кез келген $h(x) \in L_2(a,b)$ үшін $J(h) > 0$ болуы. Расында, егер барлық $\lambda_k > 0$ болса, онда теңсіздіктен $J(h) > 0$ болатыны көрініп тұр. Енді сол меншікті мәндердің кемінде біреуін $\lambda_m < 0$ деп алайық және $h(x) = \varphi_m(x)$ болсын. Меншікті функциялардың ортонормаланғаны себепті $J(\varphi_m) = \frac{1}{\lambda_m}$ болады.

Егер симметриялық $K(x,s)$ ядросының барлық меншікті мәндері оң болса, онда ядро оң деп аталады. Бұл жағдайда $J(h) \geq 0$. Егер симметриялық $K(x,s)$ ядросының барлық меншікті мәндері теріс болса, онда ядро теріс делінеді. Бұл жағдайда $J(h) \leq 0$. Егер $\forall h(x) \in L_2[a,b]$ үшін $J > 0$ болса, онда оң симметриялық ядро анық (қатаң) оң делінеді. Егер $\forall h(x) \in L_2[a,b]$ үшін $J < 0$ болса, онда теріс симметриялық ядро анық (қатаң) теріс делінеді.

4 теорема. $K(x,s)$ ядросының анық оң болуы үшін, барлық меншікті мәндер оң және ядро тұйық болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросы тұйық болмасын, онда $h(x) \neq 0$ үшін

$\int_a^b K(x,s)h(s)ds = 0$ болады. Бұдан:

$$J(h) = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,s)h(s)ds \right] h(x)dx = 0,$$

яғни $K(x,s)$ анық оң емес. Сонымен, егер $K(x,s)$ ядросы анық оң болса, онда ол тұйық.

Мерсер теоремасы. Егер симметриялық $K(x, s)$ ядросы негізгі $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында оң және үзіліссіз болса, онда бұл ядроның бисызықты қатары бірқалыпты жинақты.

Дәлелдеуі. Оң ядро үшін $K(x, s)$ екенін дәлелдейік. Қарсы жорып, (x_0, x_0) нүктесінде $K(x_0, x_0) < 0$ деп ұйғарайық. Бұл жағдайда үзіліссіздік қасиеті бойынша $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ нүктесі үшін $K(x, s) < 0$ болады. Мынадай функция құрайық:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) > 0, & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ 0, & x \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon); \end{cases}$$

бұл функция үшін

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b K(x, s) h(s) h(x) ds dx = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} K(x, s) h_1(x) h_1(s) ds dx < 0,$$

яғни оң болу шартына қарама-қайшы. Бұл қайшылық $K(x, s) > 0$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$Q(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \quad (88)$$

деп белгілейік. Әрине $Q(x, s)$ - үзіліссіз және симметриялық ядро. Енді осы $Q(x, s)$ ядросының оң екенін көрсетейік. Ол үшін $m > p$ болғанда $h = \varphi_m$ деп алайық. Онда $\{\varphi_m\}$ жүйенің ортонормаланғанын пайдаланып,

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b Q(s, x) \varphi_m(x) \varphi_m(s) ds dx = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi_m(s) \varphi_m(x) dx ds \geq 0,$$

яғни $Q(x, s)$ ядросының оң екенін дәлелдедік. Сондықтан $Q(x, x) > 0$ Олай болса, (88) теңдігі бойынша

$$Q(x, x) = K(x, x) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x) > 0$$

немесе барлық p үшін

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x) < K(x, x).$$

Сондықтан оң мүшелерден құралған $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x)$ қатар жинақты. Ал бисызықты қатар үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [\varphi_k^2(x) + \varphi_k^2(s)]$$

теңсіздігі орынды, ал бұл теңсіздіктен қатардың бірқалыпты жинақтылығы шығады. Сонымен

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_n(s)$$

теңдігі орынды. Бұдан $s = x$ деп алып, ортонормаланған $\{\varphi_n(x)\}$ үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \int_a^b K(x, x) dx = A_1$ теңдігін аламыз.

§ 5.5. Симметриялық интегралдық теңдеуге келтірілетін интегралдық теңдеулер

1. Қисық симметриялық ядро. Фредгольмнің интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Комплекс $K(x, s)$ ядросы үшін $K(x, s) = -\overline{K(s, x)}$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Нақты $K(x, s)$ ядросы үшін $K(x, s) = -K(s, x)$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Мысалы, $K(x, s) = x - s$, $K(x, s) = \sin(x - s)$ қисық симметриялық ядролар.

Егер $L(x, s) = iK(x, s)$ түріндегі ядроны алсақ, $L(x, s) = \overline{L(s, x)}$ демек, $L(x, s)$ симметриялық ядро. Егер жоғарыдағы берілген теңдеу қисық симметриялық ядролы теңдеу болса, оны

$$\varphi(x) = \mu \int_a^b L(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

симметриялық ядролы түріндегі интегралдық теңдеуге келтіруге болады (мұндағы, $\mu = i\lambda$ немесе $\lambda = -i\mu$). Демек, берілген қисық симметриялық ядролы теңдеудің кемінде бір меншікті мәні бар болады және оның барлық меншікті мәндері жорамал сандар.

2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуге келтіретін теңдеулер. Қолданбалы есептерде

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \rho(s) K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

түріндегі интегралдық теңдеу жиі кездеседі, мұндағы, $K(x,s)$ нақты симметриялық ядро және $\rho(x) \geq 0 [a,b]$ кесіндіде белгілі функция. Бұл теңдеудің екі жағында $\rho(x)$ -ке көбейтіп, одан кейін

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}\varphi(x) \quad (89)$$

өрнегімен жаңа функция енгізіп, белгісіз $\psi(x)$ үшін

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b M(x,s)\psi(s)ds + \sqrt{\rho(x)}f(x)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы, $M(x,s) = \sqrt{\rho(x)\rho(s)}K(x,s)$ симметриялық ядро.

Егер $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ сандары мен $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ функциялары $M(x,s)$ ядросының сәйкес меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда $k \neq m$ болған жағдайда $\int_a^b \psi_k(x)\psi_m(x)dx = 0$ екенін білеміз. (89) теңдігін ескерсек, біртекті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \rho(s)K(x,s)\varphi(s)ds$$

интегралдық (теңдеуінің меншікті функциялары $\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots$) бар және олар $\rho(x)$ салмақ функциясымен ортонормаланған, яғни барлық $k \neq m$ үшін

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = 0$$

теңдігі орынды болады.

Екінші қайталанатын ядро үшін

$$M_2(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \psi_k(x)\psi_k(s)$$

меншікті функциялардың жіктеліп алынған жүйелері бойынша қатарға жіктеу орынды. Бұдан:

$$\begin{aligned} M_2(x,s) &= \int_a^b M(x,t)M(t,s)dt = \int_a^b K(x,t)K(t,s)\rho(t)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \psi_k(x)\psi_k(s) = \sqrt{\rho(x)} \cdot \sqrt{\rho(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \varphi_k(x)\varphi_k(s), \end{aligned}$$

бұл теңдіктің екі жағын $\sqrt{\rho(x)\rho(s)}$ шамасына қысқартсақ,

$$H_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \rho(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s).$$

Дәл осы жолмен

$$H_p(x, s) = \int_a^b H_{p-1}(x, t) K(t, s) \rho(t) dt,$$

ядролары үшін

$$H_p(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^p} \varphi_k(x) \varphi_k(s)$$

теңдігі алынады. Егер

$$M(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \psi_k(x) \psi_k(s)$$

жіктелуі орынды болса, онда

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s)$$

және т.с.с.

3. Шмидт ядролары және ол ядролардың меншікті функциялары.

$H(x, s) \in L_2(D)$ симметриялық ядро емес, ал $H^*(x, s) = H(s, x)$ оның түйіндесі, бұларға сәйкес Фредгольм операторлары H және H^* болсын. Ал $K_1 = H^*H$ және $K_2 = HH^*$ симметриялық және оң операторлар дейік. Олардың ядролары

$$K_1(x, s) = \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt, \quad K_2(x, s) = \int_a^b H(x, t) H^*(t, s) dt$$

симметриялық және оң ядролар болады. Расында,

$$K_1(s, x) = \int_a^b H^*(s, t) H(t, x) dt = \int_a^b H(t, x) H^*(s, t) dt = \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt = K_1(x, s),$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K_1(x, t) h(x) h(s) ds dx &= \int_a^b \int_a^b \left\{ \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt \right\} h(x) h(s) ds dx = \\ &= \int_a^b dt \left\{ \int_a^b H^*(x, t) h(x) dx \int_a^b H(t, s) h(s) ds \right\} = \int_a^b dt \left(\int_a^b H(t, s) h(s) ds \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Міне, осындай қасиеттері бар $K_1(x, s)$ және $K_2(x, s)$ ядролары $H(x, s)$ ядролары үшін Шмидт ядролары деп аталады.

Әрбір симметриялық емес $H(x,s)$ ядросына Шмидт екі ортогональ функцияны сәйкестендіреді, ал жалпы жағдайда берілген ядроның меншікті функциялары ешқандай байланысы жоқ жүйемен сәйкестендіреді. Екі $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары (Шмидтің анықтауы бойынша)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b H(x,s)\psi(s)ds, \psi(s) = \lambda \int_a^b H(s,x)\varphi(x)dx \quad (90)$$

теңдеулерін қанағаттандырса, онда $\varphi(x)$ пен $\psi(s)$ функциялары одақтас меншікті функциялар деп аталады. (90) теңдеулеріндегі λ шамасы $H(x,s)$ ядросының меншікті мәні. Әрқашан меншікті функциялар пары бар болады. Расында, (90) теңдеулерінен $\psi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s)\varphi(s)ds$$

біртекті интегралдық теңдеуіне келеміз, мұндағы, $K_2(x,s)$ – Шмидт ядросы. Егер (90) теңдеулерінен $\varphi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\psi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_1(x,s)\psi(s)ds \quad (91)$$

біртекті интегралдық теңдеуін аламыз, мұнда да $K_1(x,s)$ – Шмидт ядросы.

Егер (90) жүйесінің λ_i параметрлеріне сәйкес $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ шешімдері болса, онда $K_1(x,s), K_2(x,s)$ ядролары үшін λ_i^2 сандары меншікті мәндер, ал $\psi_i(x)$ пен $\varphi_i(x)$ функциялары оларға сәйкес меншікті функциялар болады. Керісінше, λ_0 – сол ядролардың біреуінің (мәселен, $K_1(x,s)$ ядросының) меншікті мәні болсын. Бұл сан әрқашан оң. Ал $\varphi_0(x)$ функциясы сол λ_0 санына сәйкес меншікті функция болсын. Егер

$$\psi_0(x) = \sqrt{\lambda_0} \int_a^b H(t,x)\varphi_0(t)dt$$

деп алсақ, онда

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\lambda_0} \int_a^b H(x,t)\psi_0(t)dt.$$

Сонымен, (90) теңдеулер жүйесінің шешімдерін табу мәселесі $K_1(x,s)$ немесе $K_2(x,s)$ симметриялық ядроларының біреуінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табу мәселесімен пара-пар. Бұл екі ядроның меншікті мәндері бірдей және оң болғандықтан ($\lambda_i \geq 0$) оларды $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$ деп

белгілейік. $K_1(x,s)$ ядросының ортонормаланған меншікті функциялары $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ болсын. (90) теңдеуінің екіншісінде $\lambda = \lambda_i$ және $\varphi = \varphi_i(x)$ деп алсақ, (91) теңдеуінің λ_i меншікті мәніне сәйкес меншікті функциясын аламыз. Осылай алынған $\psi_i(x)$ функциялары да ортонормаланған жүйе құрайды.

Расында,

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b H(t,x) \varphi_i(t) dt, \quad \psi_k(x) = \lambda_k \int_a^b H(s,x) \varphi_k(s) ds$$

теңдеулерінен

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_i(x) \psi_k(x) dx &= \lambda_i \lambda_k \int_a^b \left\{ \int_a^b H(t,x) \varphi_i(t) dt \int_a^b H(s,x) \varphi_k(s) ds \right\} dx = \\ &= \lambda_i \lambda_k \int_a^b \int_a^b K_1(t,s) \varphi_i(t) \varphi_k(s) dt ds = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

демек, $\{\psi_i(x)\} (i=1,2,\dots)$ жүйесі ортонормаланған.

4. Шмидт теоремасы. $\forall h(x) \in L_2(a,b)$ үшін

$$f(x) = \int_a^b H(x,s) h(s) ds \quad (92)$$

теңдігі орынды екенін Шмидт дәлелдеген (мұндағы, $H(x,s)$ симметриялық емес ядро).

Теорема (Шмидт). $H(x,s)$ -үзіліссіз ядро болсын. (92) теңдігімен анықталған кез келген $f(x)$ функциясы $H(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_i(x)\}$ арқылы бірқалыпты жинақты қатарға жіктеледі.

Дәлелдеуі. Теореманың шартына байланысты (92) теңдігімен анықталған $f(x)$ функциясы үзіліссіз болады. Ал $f(x)$ үшін Фурье коэффициенттері

$$f_i = \int_a^b \int_a^b H(x,s) h(s) \varphi_i(s) ds dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b h(s) \psi_i(s) ds = \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Екінші жағынан,

$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} = \int_a^b H(x,s) \psi_i(s) ds$$

$H(x, s)$ ядросының Фурье коэффициенттері. Бессель теңсіздігінен $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ және $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ қатарларының жинақтығы шығады. Сондықтан

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x)$$

қатары абсолютті және бірқалыпты жинақты. $R(x) = f(x) - S(x)$ деп белгілейік. $R(x)$ функциясы барлық $\varphi_i(x)$ функцияларына ортогональ. Расында,

$$\int_a^b R(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b S(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} (h_i - h_i) = 0,$$

демек,

$$\int_a^b R(x) S(x) dx = \int_a^b R(x) \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i} \int_a^b R(x) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (93)$$

Мына өрнекті қарастырайық:

$$\int_a^b H(x, t) f(x) dx = \int_a^b H(x, t) R(x) dx + \int_a^b H(x, t) S(x) dx.$$

Бұған (92) теңдігін пайдалансақ,

$$\int_a^b K_1(x, s) h(s) ds = \int_a^b H(x, t) R(x) dx + \int_a^b H(x, t) S(x) dx.$$

Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша $\int_a^b K_1(x, s) h(s) ds$ функциясы $K_1(x, s)$

ядросының меншікті $\psi_i(x)$ функциялары арқылы коэффициенттері $\frac{h_i}{\lambda_i^2}$ болған

бірқалыпты жинақты қатарға жіктеуге болады. Екінші жағынан

$$\int_a^b H(x, t) S(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} h_i \psi_i(t).$$

Сондықтан алдыңғы теңдіктен $\int_a^b H(x, t) R(x) dx = 0$.

Демек (93) және соңғы теңдіктерден

$$\int_a^b f(x) R(x) dx = \int_a^b \int_a^b H(x, s) h(s) R(x) ds dx = 0,$$

$$\int_a^b R^2(x)dx = \int_a^b R(x)[f(x) - S(x)]dx = 0,$$

яғни $R(x) = 0$. Ендеше

$$f(x) = S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) \quad (94)$$

теңдігін аламыз. Бұл формуладан $\forall g(x) \in L_2[a, b]$ үшін

$$\int_a^b \int_a^b H(x, s) h(s) g(x) ds dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \cdot g_i.$$

Осы тәсілмен кез келген $f(x) = \int_a^b H(x, s) g(s) ds$ функциясын $\psi_i(x)$ функциялары арқылы бірқалыпты жинақты $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} g_i \psi_i(x)$ қатарына жіктеуге болады. Теорема дәлелденді.

Енді (94) формуласын симметриялық

$$K_2(x, s) = \int_a^b H(x, t) H^*(t, s) dt$$

ядросына қолданайық. Сонда ол ядро

$$K_2(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i(x) \psi_i(s) \quad (95)$$

түрінде жіктеледі. Дәл осылай

$$K_1(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i(x) \psi_i(s)$$

қатарын аламыз.

$H(x, s)$ ядросын жіктейік. $\{\varphi_i(x)\}$ жүйесі бойынша

$$H(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(s) \varphi_i(x)$$

түрінде жіктейміз, мұндағы,

$$H_i(s) = \int_a^b H(x, s) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(s),$$

ал бұл мәнді алдыңғы қатарға қойып,

$$H_i(x, s) = \sum_a^b \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s)$$

қатарын аламыз. Бұл қатар x пен s бойынша орташа жинақты. Расында, жоғарыдағы өрнектерден

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[H(x, s) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s) \right]^2 ds &= \int_a^b H^2(s, x) ds - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x) = \\ &= K_2(x, x) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x), \end{aligned}$$

бұл (95) бірқалыпты жинақты қатарының қалдық мүшесі, сондықтан ол $n \rightarrow \infty$ жағдайда нөлге ұмтылады. Демек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[H(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \varphi_i(s) \right]^2 dx = 0.$$