5. Моногенділік. Коши-Риман шарттары. Аналитикалылық

$z = x + iy$ кешен айнымалы жазықтығының Д аймағында берілген бірмәнді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функциясын қарастырайық. Айталық z және $z + \Delta z$ нүктелерінің екеуі де Д аймағында жатсын. $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta f = \Delta u + i\Delta v$ айырымын z тәуелсіз айнымалысының $\Delta z \neq 0$ өсімшесіне сәйкес $f(z)$ функциясының өсімшесі деп атаймыз.

Егер Δz-тің нөлге кез келген ұмтылуында $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда бұл шек $f(z)$ функциясының z нүктесіндегі туындысы деп аталады және оны $f'(z)$ арқылы белгілеу қабылданған, яғни

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \qquad (16)$$

$z \in Д$ нүктесінде туындысы бар $f(z)$ функциясы осы нүктеде **моногендік** функция деп аталады.

z нүктесінде моногендік $f(z)$ функциясы үшін $\Delta z = \Delta x$ немесе $\Delta z = i\Delta y$ мәндерін қабылдағанда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x, y + \Delta y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}\right] = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \qquad (17)$$

теңдіктеріне келеміз. Бұдан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (18)$$

теңдіктерін аламыз.

Демек, z нүктесінде моногендік $f(z)$ функциясының нақты және жорымал бөліктерінің осы нүктеде бірінші ретті дербес туындылары бар және олар (18) теңдіктері арқылы байланысқан, яғни (18) теңдіктер $f(z)$ функциясының моногендігінің қажетті шартын анықтайды және (18) теңдіктерді, әдетте, Коши- Риман шарттары деп атайды.

(18) шарттарының орындалуымен бірге $u(x, y)$ және $v(x, y)$ функцияларының толық дифференциалдарының бар болу шарты $f(z)$

функциясының z нүктесінде моногендік болуының жеткілікті шарты болып табылады. Шынында да, толық дифференциалдың бар болуы

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y),$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \delta(x, y, \Delta x, \Delta y) \tag{19}$$

теңдіктеріне тең мағыналы, мұндағы ε және δ шамалары $\Delta z \to 0$ ұмтылғанда $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ арқылы жоғарғы ретті шексіз аз.

Енді

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{20}$$

белгілеулерін енгізіп, (19) теңдіктерді

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\Delta z} + \varepsilon + i\delta \tag{21}$$

түрінде жазуға болады. (18) теңдіктерді (20) көмегімен

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{22}$$

деп жазуға болады. Сонда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\varepsilon + i\delta}{\Delta z} = 0$ теңдігін ескеріп, (21) теңдіктен

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) \tag{23}$$

шегінің бар екенін аламыз, ал бұл $f(z)$ функциясының z нүктесінде моногендік екенін дәлелдейді.

Ал (21), (22) көмегімен z нүктесінде моногенді f функциясының Δf өсімшесі

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \varepsilon + i\delta \tag{24}$$

түрінде болады. Мұның оң жағынын бірінші қосылғышы z нүктесінде моногенді функция **дифференциалы** деп аталады да

$$df = f'(z)\Delta z \tag{25}$$

арқылы белгіленеді және z нүктесінде моногенді f функциясының дифференциалы Δz бойынша сызықтық және $f'(z) \neq 0$ болғанда Δf өсімшесінің бас бөлігі болып табылады. Ал $f(z) = z$ функциясы бүкіл кешен жазықтықта моногенді және

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

болғандықтан, (25) белгілеуде $dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z$ деп жазуға болады.Сонда

$$df(z) = f'(z)dz\,. \qquad (26)$$

$z \in Д$ нүктесінде моногенді $f(z)$ функциясының дифференциалы үшін (26) жазу $f'(z)$ туындысын дифференциалдар қатынасы $f'(z) = \dfrac{df}{dz}$ түрінде өрнектеуге мүмкіндік береді, ал бұл, егер (22) ескерсек, (20) белгілеулерге толық сәйкес.

Егер $Д$ аймағында берілген бір мәнді $f(z)$ функциясы осы аймақтың әрбір нүктесінде моногенді болса, онда ол **аналитикалық** немесе **голоморфты** деп аталады.

$f(z)$ функциясы z нүктесінде "аналитикалық" деген сөйлемді "$f(z)$ функциясы осы нүктенің белгілі бір маңайында аналитикалық" деген мағынада қолданамыз.

Сонымен, $Д$ аймағында бірмәнді $f(z)$ функциясының аналитикалық болуы үшін осы аймақта Коши-Риман шартының орындалуы қажетті, ал қосымша du және dv дифференциалдарының бар болуы қосымша үйғарымдарының орындалуында жеткілікті.

Г.Луман, Д.Е.Меньшов және П.Монтельдер $f(z)$ функциясының үзіліссіздік жағдайында да бүкіл $Д$ аймағында Коши-Риман шарттарының орындалуы осы аймақта $f(z)$ функциясының аналитикалық болуы үшін қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеген.