2-текті меншіксіз интеграл.

Бұл пунктте анықталған интегралдың анықтамасын шектелмеген функциялар үшін жалпылаймыз. Айталық, $f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартысегментте берілген. Егер функция $[a;b)$ жартысегментте шектелмеген, ал $\forall\ [a;b-\varepsilon],\ \ \varepsilon > 0$ сегментте шектелген болса, онда $x=b$ нүктесін *ерекше нүкте* деп атайды. $f(x)$ функциясы осындай сегментте интегралдансын.

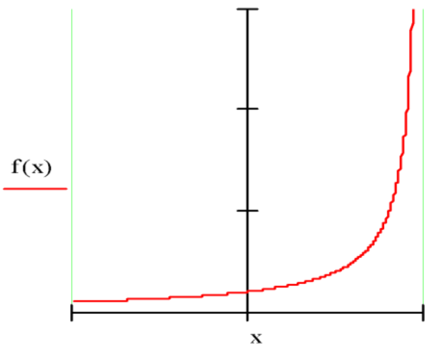
Анықтама. Егер

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

шегі бар болса, онда сол шекті $f(x)$ функциясының $[a;b]$ сегментіндегі *2-текті меншіксіз интегралы* деп атайды және $\int_a^b f(x)dx$ деп белгілейді. Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (2)$$

(2) шек ақырлы сан болса $\int_a^b f(x)dx$ *меншіксіз интегралын жинақталады* деп атайды. Басқа жағдайларда, яғни, шек табылмаса немесе шектің мәні ∞ болса $\int_a^b f(x)dx$ *меншіксіз интегралын жинақталмайды* деп айтады.



Теорема 2.1. (2-текті меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін Коши критерийі).

$f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартысегментте берілген. $x=b$ ерекше нүкте болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақталуы үшін Коши шартының, яғни

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall \eta', \eta'' : 0 < \eta'' < \eta' < \delta) : \left| \int_{b-\eta'}^{b-\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.
(дәлелдеуін [3], тарау 9, параграф 2 қараңыз **)**

Ескерту 4. Интеграл астындағы функцияға кейбір шарттар қойсақ, 2-текті меншіксіз интегралды алмастырулар арқылы 1-тектіге келтіруге болады.

Ескерту 5. Алдыңғы пунктте келтірілген теоремалардың айтылуларының барлығын 2-текті меншіксіз интеграл үшін де айтуға болады. Ол теоремалардың айтылуларында $x=b$ ерекше нүкте деп алып, $f(x)$ функциясы $[a;b)$ жартысегментте берілген деп қарастыру керек.

Мысал 7. $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз. Мұнда $p > 0$.

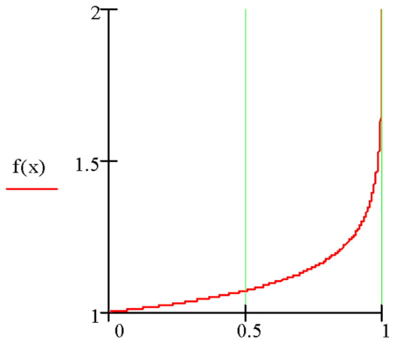
Шешуі. Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{(b-x)^p}$ функциясының $[a;b)$ жартысегменттегі ерекше нүктесі $x=b$ болады. Бұл функция $\forall \; [a;b-\eta], \; (\eta > 0)$ сегментінде интегралданады және

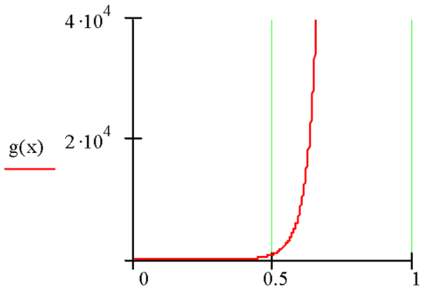
$$\int_a^{b-\eta} \frac{1}{(b-x)^p}dx = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p} \Big|_a^{b-\eta} = \frac{(b-a)^{1-p} - \eta^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ -\ln(b-x) \Big|_a^{1-\eta} = \ln(b-a) - \ln\eta, & p = 1 \end{cases}$$

Осыдан

$$\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}\frac{1}{(b-x)^p}dx=\begin{cases}\lim\limits_{\eta\to+0}\dfrac{(b-a)^{1-p}-\eta^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1\\ \infty, & p>1\end{cases}\\ \lim\limits_{\eta\to+0}\left(\ln(b-a)-\ln\eta\right)=-\infty, & p=1\end{cases}$$

Ендеше, $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$ 2-текті меншіксіз интегралы $p<1$ болса жинақты , ал $p\geq 1$ болса жинақсыз болады. Төменде $f(x)=\frac{1}{(1-x)^{0.1}}$, $g(x)=\frac{1}{(1-x)^{10}}$ функцияларының графиктері келтірілген:





Мысал 8. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Бұл меншіксіз интегралда екі ерекше нүкте $x=\pm1$ бар. Сондықтан төмендегідей қосылғыштарға жіктейміз:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

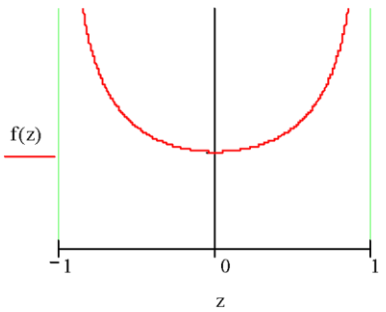
енді анықтама бойынша

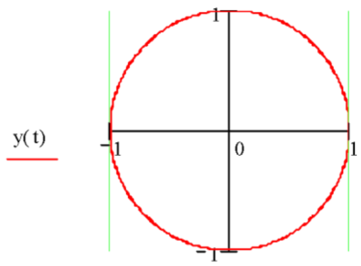
$$= \lim_{\eta\to 0}\int_{\eta-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\lambda\to 0}\int_{0}^{1-\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\eta\to 0}\left(\arcsin 0 - \arcsin(\eta-1)\right) +$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\left(\arcsin(1-\lambda) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

аламыз. Сондықтан берілген интеграл жинақты болады.

Геометриялық мағынасы: $y=0, \quad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ қисықтармен шектелген фигураның ауданы радиусы $R=1$ дөңгелектің ауданымен бірдей болады екен.





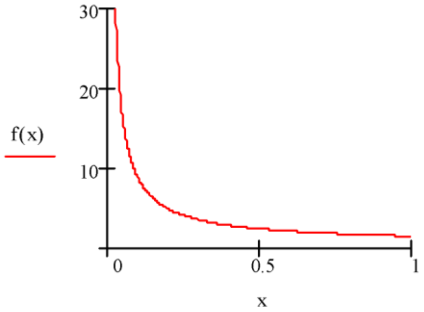
Мысал 9. $\int_0^1 \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$ интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

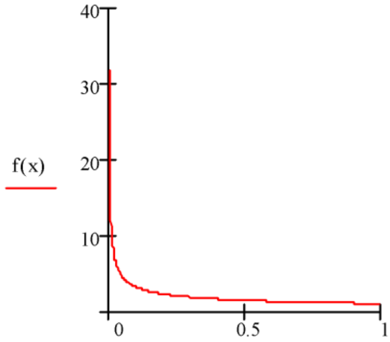
Шешуі. Бұл 2-текті меншіксіз интегралдың ерекше нүктесі $x=0$. Ерекше нүктенің маңайында

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}dx \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$$

Ал, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ интегралы 7- мысалдың қорытындысы бойынша жинақты $\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$. Сондықтан берілген интеграл да жинақты болады.

$f(x)=\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}$ функциясының графигі: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясының графигі:





Мысал 10. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Бұл меншіксіз интеграл әрі 1-текті, әрі 2-текті. Ерекше нүктелері $x = 0$, $x = +\infty$. Сондықтан оны қосылғыштарға жіктейміз:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$$

Теңдіктің оң жағындағы бірінші қосылғыш – 2-текті меншіксіз интеграл, ерекше нүктесі $x = 0$, ал екінші қосылғыш – 1-текті, ерекше нүктесі $x = +\infty$. Мынадай жағдайларды қарастырайық:

1) $p > q$

Бірінші қосылғышты жинақтылыққа зерттейік. Интеграл астындағы функцияны өрнектеу арқылы

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^q\left(x^{p-q} + 1\right)} dx \underset{x \to 0}{\sim} \int_0^{1} \frac{1}{x^q} dx$$

аламыз. $\int_0^{1} \frac{1}{x^q} dx$ 2-текті меншіксіз интегралы 7-мысалдың қорытындысы бойынша $q < 1$ болса жинақталады, $q \geq 1$ болса жинақталмайды.

Екінші қосылғышты жинақтылыққа зерттейік. Интеграл астындағы функцияны өрнектеу арқылы

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p\left(x^{q-p} + 1\right)} dx \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

аламыз. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 1-текті меншіксіз интегралы 2-мысалдың қорытындысы бойынша $p > 1$ болса жинақталады, $p \leq 1$ болса жинақталмайды.

2) $p = q$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{p} + x^{q}}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} \frac{1}{x^{p}}\, dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}}\, dx \right)$$

Жақшаның ішіндегі бірінші қосылғыш $p \,\square\, 1$ болса жинақты, ал екіншісі $p \,\square\, 1$ болса жинақты. Демек, қосынды жинақсыз.

3) $p \,\square\, q$ 1) жағдай сияқты қарастырылады.

Сонымен, $\begin{cases} p \,\square\, q \\ q \,\square\, 1 \\ p \,\square\, 1, \end{cases}$ $\begin{cases} p \,\square\, q \\ q \,\square\, 1 \\ p \,\square\, 1 \end{cases}$ болса берілген интеграл жинақталады.

4. Абсолютті және шартты жинақты интегралдар

Анықтама. $x = b$ ерекше нүкте болатын $\int_a^b f(x)dx$ жинақты меншіксіз интеграл берілген. Егер $\int_a^b |f(x)|dx$ интегралы да жинақты болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралының *жинақтылығы абсолютті* деп аталады. Егер $\int_a^b |f(x)|dx$ интегралы жинақсыз болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралының *жинақтылығы шартты* деп аталады.

Теорема 3.1. Егер интегралдың жинақтылығы абсолютті болса, онда ол интегралдың өзі де жинақты болады.
(Керісінше бола бермейді)
(дәлелдеуін [4], параграф 33, п.5 қараңыз **)**

Мысал 11. $\int_1^{+\infty} \frac{cosx}{x}dx$ интегралын абсолютті жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. Бұл 1-текті меншіксіз интеграл, ерекше нүктесі $x = +\infty$. Интегралдың жинақтылығын Дирихле белгісімен зерттейміз.

Мұнда қорытынды бойынша $f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \frac{1}{x}$ деп алайық. Сонда $\forall x \ge 1$ үшін

1) $|F(x)| = |\sin x| \le 1$, алғашқы функция шектелген;

2) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ монотонды кемімелі, $\forall x \ge 1$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Олай болса, берілген интеграл Дирихле белгісі бойынша жинақты. Енді интеграл астындағы функцияны модулі бойынша бағалайық:

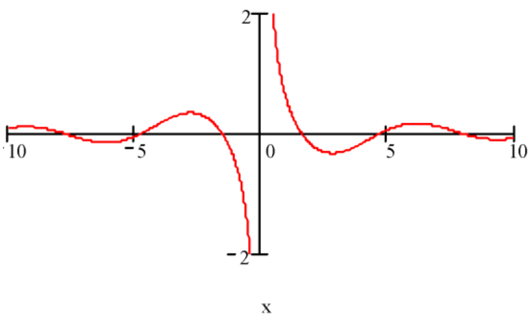
$$\left|\frac{\cos x}{x}\right| = \frac{|\cos x|}{x} \ge \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos 2x}{x}\right), \qquad x \in [1;+\infty)$$

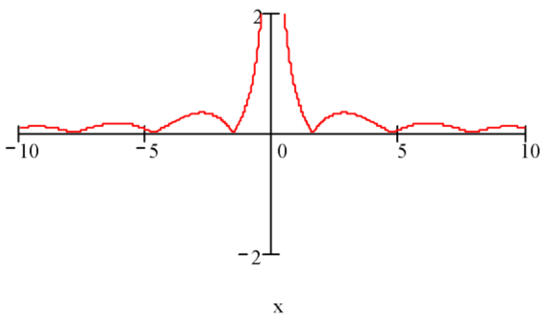
$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x} dx$ интегралы 2-мысалдың қорытындысы бойынша жинақсыз ($\lambda = 1$).

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{cos 2x}{x} dx$ интегралы Дирихле белгісі бойынша жинақты. Олай болса,

$\int\limits_1^{+\infty} \left|\dfrac{\cos x}{x}\right| dx$ жинақталмайды. Ендеше, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{cos x}{x} dx$ интегралының жинақтылығы шартты болады.

$f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $g(x) = \left|\dfrac{\cos x}{x}\right|$ функцияларының графиктері:





5. Меншіксіз интеграл және сандық қатар.

Ерекше нүктесі $x = b$ болатын

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

меншіксіз интегралын қарастырайық. Айталық,

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \qquad b_k \underset{k\to\infty}{\to} b$$

Онда

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx \tag{2}$$

қатарын қарастыруға болады, оның k-шы мүшесі $u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx$

Теорема 5.1. Егер (1) интегралы жинақты болса, онда (2) сандық қатар да жинақталады және төмендегі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx$$

Расында,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Егер $f(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ жартытүзуде теріс емес болса, онда керісінше де, (2) қатардың жинақтылығынан (1) интегралдың жинақтылығы шығады.

(дәлелдеуін [2], тарау 9, параграф 15 қараңыз **)**

Егер $f(x)$ функциясы $[a;+\infty)$ жартытүзуде таңбасын сақтамаса, онда (2) қатардың жинақтылығынан (1) интегралдың жинақтылығы әруақытта шыға бермейді. Мысалы,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x dx = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

қатары жинақты. Ал, анықтама бойынша

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \sin x dx = \lim_{A\to\infty} \cos x \Big|_A^0 = \lim_{A\to\infty} (1 - \cos A)$$

Бұл шек табылмайды. Сондықтан, $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ интегралы жинақсыз.