№2-дәріс. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. Матрицаның рангі

А матрицасының рангі деп осы матрицаның нөлге тең емес минорларының ең үлкен ретін айтады және оны r_A, $r(A)$ немесе $rangA$ деп белгілейді. $0 \le r(A) \le \min(m,n)$ болады, мұндағы $\min(m,n)$- m және n сандарының кішісі.

1-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангін табыңыз.

1-әдіс. Минорлар әдісі. Бұл матрицаның рангі 3-тен аспайды. Сондықтан 3-ші ретті минорлар құрамыз. Егер 3-ші ретті минорлардың ішінде бір нөлге тең емес минор табылса, онда ранг 3-ке тең болады. Ал 3-ші ретті минорлардың бәрі нөлге тең болса, онда минор 2-ге не 1-ге тең болады. Оны білу үшін тағы 2-ші ретті минорлар құрамыз. Олардың ішінде бір нөлге тең емес минор табылса, онда ранг 2-ге тең болады. Ал 2-ші ретті минорлардың бәрі нөлге тең болса, минор 1-ге тең.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 3-ші ретті минорлардың бәрі нөлге тең. Олай болса, 2-ші ретті минорлар құрамыз: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Демек ранг 2-ге тең, яғни $r(A) = 2$

2-әдіс. Элементар түрлендіру әдісі. Матрицаны элементар түрлендіру деп:

1. матрицаның екі жолын (бағанын) ауыстыру;
2. матрицаның жолын (бағанын) нөлге тең емес санға көбейту;
3. бір жол (баған) элементтеріне басқа жолдың (бағанның) сәйкес қандай да бір санға көбейтілген элементтерін қосу амалдарын айтады.

Элементар түрлендіру арқылы алынған матрицаны бастапқы матрицаға эквивалентті матрица дейді және орталарына $\sim$ белгісі қойылады. Матрицаның рангін табу үшін элементар түрлендіруді пайдаланып, матрицаны сатылы түрге келтіреміз.

Теорема. Матрицаны элементар түрлендіргеннен оның рангі өзгермейді.

2-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Демек ранг 2-ге тең, яғни $r(A) = 2$.

Кері матрица. Егер $A \cdot A' = A' \cdot A = E$ шарты орындалса, онда A' ***матрицасын*** A ***матрицасына кері матрица*** дейді және оны A^{-1} түрінде белгілейді**.** Мұндағы A**,** A^{-1}**,** E матрицалары бірдей өлшемді квадрат матрицалар.

Ескерту: Егер A^{-1} матрицасы бар болса, онда ол жалғыз болады.

Теорема. Квадрат A матрицасына кері матрица табылуы үшін $|A| \neq 0$ болуы қажетті және жеткілікті. $|A| \neq 0$ болғанда кері матрица A^{-1} былайша есептелінеді $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^*$.

Мұндағы $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ алгебралық толықтауыштардан түзілген матрица.

3-мысал. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ матрицасына кері матрица табыңыз. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1-1+2=2\neq 0$.

Олай болса,

$A_{11}=3,\ A_{12}=-1,\ A_{13}=-1,\ A_{21}=2,\ A_{22}=0,\ A_{23}=-2,\ A_{31}=-1,\ A_{32}=1,\ A_{33}=1$

Сонда кері матрица былай болады: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі былай жазылады:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \qquad (2.1)$$

мұндағы $a_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ жүйенің коэффициенттері, ал b_i - бос мүшелер деп аталады. (2.1) жүйені матрицалық түрде былай жазуға болады $AX=B$ немесе

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}}_{B},$$

мұндағы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$ жүйе матрицасы деп аталады.

Егер $(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)$ сандар жиыны (2.1) теңдеулер жүйесін тепе-теңдікке айналдырса, онда бұл сандар жиыны осы ***жүйенің шешімі*** деп аталады.

Егер теңдеулер жүйесінің кемінде бір шешімі бар болса, онда ***жүйе үйлесімді*** деп аталады, ал жүйенің бір де шешімі болмаса, онда ***жүйе үйлесімсіз*** деп аталады.

Егер A матрицасын бос мүшелерден тұратын бағанмен толықтырса, онда пайда болған матрицаны ***кеңейтілген матрица*** дейді және оны $\bar{A}$ деп белгілейді. Сонымен

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$

Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері.

1. Крамер ережесі. n белгісізі бар n теңдеулер жүйесі берілсін

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.2)$$

Мұндай жүйенің A матрицасы квадрат матрица болады.

Теорема. Егер (2.2) жүйесі үшін $\Delta = |A| \neq 0$ болса, онда жүйенің жалғыз шешімі былайша табылады:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2.3)$$

мұнда $\Delta_k \ (k = 1,2,\ldots n)$ - Δ анықтауышындағы x_k белгісіздерінің коэффициеттерін бос мүшелермен алмастырғаннан пайда болған анықтауыш. (2.3) **Крамер формуласы** деп аталады.

4-мысал. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесімен шешу керек.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$ $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$ Жауабы: $(1, 2)$

2. Матрицалық әдіс. n белгісізі бар n теңдеулер жүйесі, яғни (2.2) жүйе берілсін. Жүйені матрицалық түрде былай жазамыз $AX = B$

Теорема. Егер $\Delta = |A| \neq 0$ болса, онда (2.2) жүйесінің $X = A^{-1}B$ теңдігімен анықталатын жалғыз шешімі бар.

5мысал. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad A_{11} = 3, \ A_{12} = -1, \ A_{21} = 1, \ A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0+7 \\ 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$ Жауабы: $(1, 2)$

3. Гаусс әдісі. n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі, яғни (2.1) берілсін. Жүйені Гаусс әдісімен шешу екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде (*тік жүріс*) жүйе трапеция тәріздес түрге келтіріледі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$ – трапеция тәріздес жүйе.

Мұнда $k \le n, \ a_{ii} \neq 0, \ i = \overline{1,k}.$ a_{ii} коэффициенттері жүйенің негізгі элементтері деп аталады.

Екінші кезінде (*кері жүріс*) мүмкін болса, шыққан жүйеден біртіндеп белгісіздерді табады. Практикада жүйемен емес кеңейтілген матрицамен істеген ыңғайлы болады. Сондықтан жүйені Гаусс әдісімен шешу үшін кеңейтілген матрица құрып,оны элементарлық түрлендірудің көмегімен трапеция тәріздес түрге келтіреді. Бұл жағдайда

a_{11} коэффициентінің 1-ге тең болғаны ыңғайлы. Ол үшін теңдеулердің орындарын ауыстыру керек немесе теңдеудің екі жағын да $a_{11} \neq 1$ бөлу керек. Содан соң қайтадан жүйе құрып, сол жүйені шешеміз.

6-мысал. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$ жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) (-1)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Екінші матрицаның екінші жолын алу үшін бірінші жолды (-1)-ге көбейтіп, екінші жолға қостық, ал үшінші жолын алу үшін бірінші жолды $(-2)-$ ге көбейтіп, үшінші жолға қостық. Жүйе матрицасы үшбұрышты түрге келді. Енді қайтадан матрицадан жүйеге көшейік және соңғы жолдан бастап жазайық.

$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$. Осыдан $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 5 - x_3 = 5 - 2 = 3 \\ x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 3 - 2 = 1 \end{cases}$. Жауабы: $(1;\, 3;\, 2)$

Теорема (Кронекер-Капелли) (2.1) жүйе үйлесімді болуы үшін жүйенің матрицасының рангі кеңейтілген матрицаның рангіне тең болуы қажетті және жеткілікіті, яғни $r(A) = r(\overline{A})$.

Әдебиеттер: 1 нег.[20-41], 11 қос. [115-135].

Бақылау сұрақтар:

1. Матрицаның рангісінің анықтамасын беріңіз.
2. Кері матрицаның анықтамасын беріңіз.
3. Кері матрица қалай есептелінеді?
4. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің әдістерін айтыңыз.