

ЛЕКЦИЯ-15

§7.3. Меллин түрлендіруі және оны қолдану

Қолданбалы есептерде жоғарыдағы Лаплас түрлендіруімен бірге екіжақты Лаплас түрлендіруі

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (129)$$

қолданады, мұндағы, $f(t)$ функциясы теңдіктің оң жағындағы интеграл анықталатындай болып таңдап алынады.

Мысалы, егер

$$|f(t)| \leq \begin{cases} e^{\alpha t}, & t > 0, \\ e^{-\alpha t}, & t < 0 \end{cases}$$

болса, бұл функциядан алынған $F(p)$ функциясы $|\operatorname{Re} p| > \alpha$ облысында аналитикалық функция болады. (129) формуласы мен анықталған Лапластың екіжақты түрлендіруі де жоғарыдағы Лапластың біржақты түрлендіруіндегідей Меллиннің кері түрлендіру формуласымен

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (130)$$

тікелей байланысты.

Егер (129) бен (130) формулаларында p -ны $-p$ -ға t -ны $\tau = e^t$ функциясына ауыстырсақ, онда ол түрлендірулер

$$F(-p) = \int_0^{\infty} f(\ln \tau) e^{p \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau}, \quad f(\ln \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(-p) e^{-p \ln \tau} dp$$

түрінде жазылады. Бұлардан $f(\ln \tau) = g(\tau)$ және $F(-p) = G(p)$ деп белгілесек,

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) t^{p-1} dt, \quad (\sigma + i\eta = p), \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(p) t^{-p} dp, \quad t > 0 \quad (131)$$

Меллин түрлендіруін аламыз.

1. Бұл түрлендіруді де Лаплас түрлендіруіндей төмендегі қасиеттерге ие болады:

$$1^0. f(\alpha t) \div \frac{G(p)}{\alpha^p};$$

$$2^0. t^\alpha g(t) \div G(p + \alpha); \quad 3^0. f(t)g(t) \div \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq. \quad (132)$$

Мына төмендегі туындыны түрлендіру туралы теоремаға арнайы тоқталайық.

$$4^0. \text{Егер } \lim_{t \rightarrow 0} t^{p-1} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} g(t) = 0 \text{ болса, онда}$$

$$g'(t) \div -(p-1)G(p-1). \quad (133)$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін $g(t)$ функциясының туындысына қолданып,

$$g'(t) \div \int_0^\infty g'(t)t^{p-1}dt = g(t)t^{p-1}\Big|_0^\infty - (p-1)\int_0^\infty g(t)t^{p-2}dt = -(p-1)G(p-1).$$

(133) формуласын қайталап (131) түрлендіруін кез келген жоғарғы ретті туынды үшін анықтауға болады. (132) және (133) өрнектерінен:

егер $t^p g(t)\Big|_0^\infty = 0$ болса,

$$tg'(t) \div -pG(p),$$

егер $t^{p+1} g'(t)\Big|_0^\infty = t^p g(t)\Big|_0^\infty = 0$ болса,

$$t^2 g''(t) \div p(p+1)G(p).$$

5⁰. Егер $f(t)$ мен $g(t)$ функцияларының Меллин түрлендірулері сәйкес түрде $F(p)$ мен $G(p)$ болса, онда:

$$\int_0^\infty f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \div F(p)G(p). \quad (134)$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \right) t^{p-1} dt = \left| \frac{t}{\tau} = t_1 \right| = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \left(\int_0^\infty g(t_1)t_1^{p-1} dt_1 \right) \tau^{p-1} \tau = F(p)G(p).$$

2. Меллин түрлендіруінің қолданылулары. (134) формуласын

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(\tau) K\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} + f(t) \quad (135)$$

интегралдық теңдеуді шешуге қолданады. $\varphi(t), f(t), K(t)$ функциялары үшін Меллин түрлендіруі орынды болсын, яғни $\varphi(t) \div \Phi(p), f(t) \div F(p), K(t) \div K(p)$ анықталған болсын, мұндағы, $F(p)$ мен $K(p)$ ортақ $\sigma_1 < \operatorname{Re} p = \sigma < \sigma_2$ облысында аналитикалық функциялар болсын. (135) теңдеуінің екі жағына Меллин түрлендіруін қолдансақ, $\Phi(p) = F(p) + \lambda K(p)\Phi(p)$, бұдан

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda K(p)},$$

демек,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(p)}{1 - \lambda K(p)} t^{-p} dp$$

жоғарыдағы (135) теңдеуінің шешімі.

Мысал ретінде Фокстың интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (136)$$

Бұл теңдеудің екі жағында x^{p-1} функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша 0-ден ∞ -ке кейін интегралдап,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \int_0^{\infty} x^{p-1} K(x, t) dx$$

теңдігін аламыз. Бұған Меллин түрлендіруін қолдансақ,

$$\Phi(p) = F(p) + K(p) \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-p} dt.$$

Мұндағы, $\int_0^{\infty} t^{-p} \varphi(t) dt = \Phi(1-p)$ болғандықтан, алдыңғы өрнекті

$\Phi(p) = F(p) + \Phi(1-p)K(p)$ түрінде аламыз. Бұл теңдік p -ны $1-p$ -ға ауыстырсақ, $\Phi(1-p) = F(1-p) + \Phi(p)K(1-p)$. Соңғы өрнектерден

$$\Phi(p) = \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)}. \quad (137)$$

Енді (137) теңдігіне Меллиннің кері түрлендіру формуласын қолданып, (136) теңдеуінің шешімін анықтаймыз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)} x^{-p} dp.$$

Мысал. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt dt$ интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $\cos x$ функциясының кескінін анықтайық.

$$K(p) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{p-1} \cos x dx,$$

ол үшін

$$\int_0^\infty e^{-ix} x^{p-1} dx = e^{-\frac{i\pi}{2}p} \Gamma(p)$$

формуласын қолданып, мұндағы нақты және жорамал бөліктерді өзара теңестіріп:

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos x dx = \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}, \quad \int_0^\infty x^{p-1} \sin x dx = \Gamma(p) \cdot \sin \frac{\pi p}{2}$$

екенін анықтаймыз. Сондықтан

$$K(p) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \cos x dx = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}.$$

Бұдан кейін $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ екенін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} K(p)K(1-p) &= \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(1-p) \sin \frac{\pi p}{2} = \\ &= \frac{2\lambda^2}{\pi} \Gamma(p)\Gamma(1-p) \cos \frac{\pi p}{2} \sin \frac{\pi p}{2} = \lambda^2. \end{aligned}$$

Демек, (137) теңдігінен

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2} [F(p) + F(1-p)K(p)], \quad |\lambda| \neq 1$$

екенін анықтаймыз. Бұдан

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[F(p) + F(1-p)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2} \right] x^{-p} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} F(p) dp + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} \Gamma(p)\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi p}{2} dp. \end{aligned}$$

Ал $\frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} F(p) dp = f(x)$, $\int_0^\infty t^{-s} f(t) dt = F(1-s)$ болғандықтан

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (xt)^{-p} F(p) \cos\frac{\pi p}{2} \left(\int_0^\infty f(t) dt \right) dp.$$

Бұл жерде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (xt)^{-p} \Gamma(p) \cos\frac{\pi p}{2} dp = \cos xt$$

екенін пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot f(t) \cos xt$$

түрде анықтаймыз.