Дәріс 11. Көп айнымалыдан тәуелді функция

Өмірде қандай да бір құбылыстар, оның ішінде экономикалық қатынастар да, бірнеше шамалардың байланысы арқылы сипатталады. Осы байланыстарды зерттеу көп айнымалы функция ұғымын енгізуді қажет етеді.

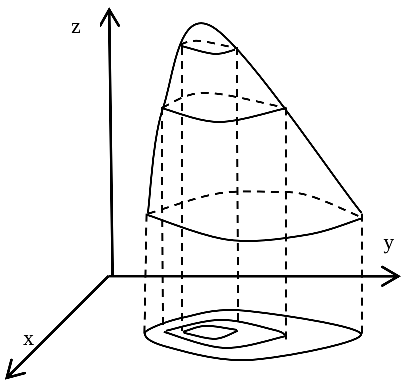
Анықтама. ***Қандай да бір X жиынының*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***элементтеріне қандай да бір заң немесе ереже бойынша z шама сәйкес қойылса, X жиынында n айнымалыдан тәуелді функция берілген дейміз де***

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

деп жазамыз.

Мұндағы $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалылар тәуелсіз айнымалы немесе аргумент, ал ***z*** тәуелді айнымалы немесе функция, f – заң немесе ереже, ал X - функцияның анықталу облысы болады.

Бұдан былайғы жағдайда екі айнымалыдан тәуелді функция қарастырамыз. Екі айнымалыдан тәуелді функцияға қатысты айтылған тұжырымдардың барлығын одан да жоғарғы айнымалыдан тәуелді функциялар үшін дұрыс болады.



Екі айнымалыдан тәуелді функцияны

$$z = f(x, y)$$

деп белгілейміз. Бұл функцияның анықталу облысы xOy жазықтығында анықталады. Екі айнымалы дан тәуелді функция графигі үш өлшемді кеңістіктегі *(x, y, z)* нүктелердің геометриялық орнымен анықталатын қандай да бір бет болады. Мұнда *x* – абсцисса, *y* – ордината, *z* – апликата, және олар арасында *z = f(x, y)* функциялық байланыс бар.

Функция графигін $z = C$ жазықтығымен қиғанда пайда болатын сызық $z= f(x, y)$ функциясының **деңгейлік сызығы** деп аталады:

$$f(x, y) = C \qquad (2)$$

Көп жағдайда функция графигін қарастырғаннан гөрі оның деңгейлік сызығын зерттеу оңай болады.

$z= f(x, y)$ функциясына бір айнымалыдан тәуелді екі функция сәйкес қоюға болады: x аргументті тұрақты деп ($x=x_0$) қарастырғанда $z= f(x_0 , y)$ функциясын және y аргументті тұрақты деп ($y=y_0$) қарастырғанда $z= f(x , y_0)$ функциясын.

ДЕРБЕС ТУЫНДЫ

$z= f(x, y)$ функциясын қарастырайық. x аргументке Δx өсімше y аргументке Δy өсімше берсек функция жаңа мәнге ие болады, $z= f(x+ \Delta x , y+ \Delta y)$.

$$\Delta z= f(x+ \Delta x , y+ \Delta y) - f(x, y)$$

шамасы функцияның (x,y) нүктедегі **толық өсімшесі** деп аталады. Егер тек x не y аргументке ғана өсімше берсек, онда функцияның сәйкес дербес өсімшелерін аламыз:

$$\Delta_x z= f(x+ \Delta x , y) - f(x, y); \quad \Delta_y z= f(x , y+ \Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

Анықтама. *$z= f(x, y)$ функциясының дербес өсімшелерінің сәйкес аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нолге ұмтылған жағдайдағы шегі функцияның **дербес туындысы** деп аталады және былайша жазылады:*

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (4)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (5)$$

Бұл анықтамадан z_x' туындыны табу үшін y айнымалыны тұрақты деп, ал z_y' туындыны табу үшін x айнымалыны тұрақты деп қарастыру керек. Және де бір айнымалы функция дифференциалынан белгілі дифференциалдаудың барлық ережелері сақталады.

Мысал. $z = x\ln y + \dfrac{y}{x}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. x бойынша дербес туындыны табу үшін y айнымалыны тұрақты деп аламыз, сонда

$$z_x' = (\ln y)x' + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y \cdot 1 + y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln y - \frac{y}{x^2}.$$

y бойынша дербес туындыны табу үшін x айнымалыны тұрақты деп аламыз, сонда

$$z_y' = x(\ln y)' + \frac{1}{x}y' = x\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Егер $z_x' = f_x'(x,y)$ және $z_y' = f_y'(x,y)$ дербес туындылар дифференциалданатын функциялар болса, онда бұл функциялардың **екінші ретті дербес туындыларын** табуға болады.

$z_x' = f_x'(x,y)$ функциясының дербес туындыларын табсақ

$$z_{xx}'' = \left(f_x'(x,y)\right)'_x = f_{xx}''(x,y), \qquad z_{xy}'' = \left(f_x'(x,y)\right)'_y = f_{xy}''(x,y).$$

$z_y' = f_y'(x,y)$ функциясының дербес туындыларын табсақ

$$z_{yx}'' = \left(f_y'(x,y)\right)'_x = f_{yx}''(x,y), \qquad z_{yy}'' = \left(f_y'(x,y)\right)'_y = f_{yy}''(x,y).$$

Функцияның екінші ретті $f_{xy}''(x,y)$ және $f_{yx}''(x,y)$ дербес туындыларын функцияның **аралас туындылары** деп атайды. *Егер $z = f(x, y)$ функциясы мен оның аралас туындылары қандай да бір*

$M(x_0,y_0)$ нүктенің маңайында анықталған және үзіліссіз болса, онда функцияның аралас туындылары өзара тең болады,

$$f''_{xy}(x,y) \;=\; f''_{yx}(x,y)$$

Мысал. $z = x\ln y + \frac{y}{x}$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары алдыңғы мысалда табылған:

$$z'_x = \ln y - \frac{y}{x^2}, \quad z'_y = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Енді осы туындылардан туынды табайық.

$$z''_{xx} = \left(\ln y - \frac{y}{x^2}\right)'_x = 0 - y\left(-2x^{-2-1}\right) = \frac{2y}{x^3},$$

$$z''_{xy} = \left(\ln y - \frac{y}{x^2}\right)'_y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}, \qquad z''_{yx} = \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2},$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\right)'_y = x\left(-1y^{-1-1}\right) + 0 = -\frac{x}{y^2}$$

Анықтама. *$z = f(x, y)$ функцияның **толық дифференциалы** деп осы функцияның дербес туындыларының сәйкес аргумент өсімшелеріне көбейтіндісінің қосындысын айтамыз,*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \qquad \textit{(*)}$$

Егер $f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$ функциялары үшін (*) қатынас бойынша толық дифференциалдарын тапсақ, $df = dx = \Delta x$, $dg = dy = \Delta y$ болатындығы шығады. Олай болса функцияның толық дифференциалын мына түрде жазуға болады:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (6)$$

БАҒЫТ БОЙЫНША ТУЫНДЫ. ГРАДИЕНТ

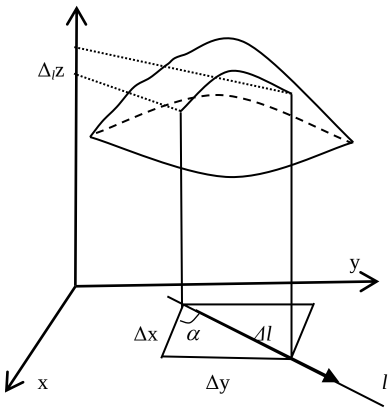
z= f(x, y) функциясы *M(x,y)* нүктесінің қандай да бір маңайында анықталған болсын және $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ вектор бағытымен анықталатын қандай да бір l бағыт берілсін. Мұнда α және β бұрыштар $\bar{e}$ векторының Ох және Оу осімен жасайтын бұрышы, ал $\cos\alpha, \cos\beta$ - вектордың бағыттаушы косинустары деп аталады және

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\,.$$

M(x,y) нүктесі l бағыт бойымен қозғалып $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ нүктеге өзгергенде z функция

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$$

өсімше алады. Егер $MM_1 = \Delta l$ болса, онда $\Delta x = \Delta l\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l\cos\beta$, олай болса



$$\Delta_l z = f(x+\Delta l\cos\alpha,\ y+\Delta l\cos\beta) - f(x, y).$$

Анықтама. ***z= f(x, y) функциясының l бағыт бойымен алған $\Delta_l z$ өсімшесінің Δl шамаға қатынасының осы шама нолге ұмтылғандағы шегі функцияның бағыт бойынша туындысы деп аталады, яғни***

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}\,.$$

Функцияның бағыт бойынша туындысының абсолют шамасы функция өзгеруінің жылдамдығын анықтайды, ал таңбасы функция өзгерісін («+» - өсетінін, «-» - кемитінін) сипаттайды.

$z = f(x, y)$ функциясының z'_x және z'_y дербес туындылары функцияның Ох және Оу остеріне параллель бағыт бойынша алынған туындылары болады.

Бағыт бойынша туынды анықтамасынан

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta \qquad (7)$$

болатындығы шығады.

Егер l бағыт координаталарымен берілсе, яғни $\bar{l} = (l_1, l_2)$, онда бұл вектордың бағыттаушы косинустары былайша табылады:

$$\cos\alpha = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \cos\beta = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \qquad (8).$$

Анықтама. ***$z = f(x, y)$ функциясының градиенті деп координаталары (z'_x, z'_y) болатын векторды айтады және grad z деп белгілейді,***

$$\textbf{grad } z = (z'_x, z'_y) \qquad (9)$$

(7) формуланың оң жағында $grad\ z = (z'_x, z'_y)$ векторы мен $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ векторының скаляр көбейтіндісі тұр, олай болса *бағыт бойынша туынды дегеніміз градиент пен бағытты анықтайтын бірлік вектордың скаляр көбейтіндісіне тең екен:*

$$z'_l = (grad\ z, \bar{e}) \qquad (10)$$

Екі вектор бірдей бағытталғанда олардың скаляр көбейтіндісі ең үлкен мән қабылдайды. Олай болса *grad z* функцияның нүктедегі максималды жылдамдық (өсу) бағытын көрсетеді екен.

Мынадай тұжырым дұрыс болады: *Қандай да бір* $M(x_0,y_0)$ *нүктеде дифференциалданатын* $z=f(x,\ y)$ *функциясының градиенті сол нүкте арқылы өтетін деңгейлік сызыққа перпендикуляр болады.*

Мысал. $z=\ln(2x^2+3y^2)$ функциясының A(-3; 2) нүктедегі градиенті мен $\bar{l}=2\bar{i}-3\bar{j}$ векторы бағытындағы туындысын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындылар табамыз:

$$z'_x=\frac{4x}{2x^2+3y^2}\ ,\quad z'_y=\frac{6y}{2x^2+3y^2}\ .$$

Дербес туындылардың A нүктесіндегі мәнін есептейміз:

$$z'_x(-3;2)=\frac{4(-3)}{2\cdot(-3)^2+3\cdot 2^2}=-\frac{2}{5}\ ,\quad z'_y(-3;2)=\frac{6\cdot 2}{2\cdot(-3)^2+3\cdot 2^2}=\frac{2}{5}$$

(9) формула бойынша функцияның A нүктесіндегі градиенті $grad\ z=\left(-\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$ табылды.

Енді осы нүктедегі бағыт бойынша туындыны табайық. (8) формула бойынша вектордың бағыттаушы косинустарды табамыз:

$$cos\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,\qquad cos\,\beta=\frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\ .$$

(7) формула бойынша функцияның A нүктесіндегі $\bar{l}=2\bar{i}-3\bar{j}$ векторы бағытындағы туындыны табылды

$$z'_l=-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{13}}$$

ФУНКЦИЯ ЭКСТРЕМУМЫ. ШАРТТЫ ЭКСТРЕМУМ. ЛАГРАНЖ ӘДІСІ

Екі айнымалыдан тәуелді $z= f(x, y)$ функциясын қарастырайық. $M(x_0,y_0)$ нүктесі функцияның анықталу облысына тиісті нүкте болсын.

Анықтама. *$M(x_0,y_0)$ нүктенің жақын маңайында жатқан барлық (x, y) нүктелер үшін $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0,y_0)$ функцияның **максимум нүктесі** деп, ал $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0,y_0)$ функцияның **минимум нүктесі** деп аталады.*

Функция максимумы мен минимумы функция экстремумы деп аталады.

Экстремумның қажетті шарты. ***$M(x_0,y_0)$ нүктесі $z= f(x, y)$ функциясының экстремум нүктесі болса, онда бұл нүктедегі функцияның дербес туындылары нолге тең,***

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Экстремумның жеткілікті шарты. ***$z= f(x, y)$ функциясы: 1) дербес туындылары нолге тең болатын, $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, $M(x_0,y_0)$ нүктесінің маңайында анықталған болсын; 2) функцияның осы нүктеде екінші ретті үзіліссіз туындылары бар және***

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Онда, егер $\Delta = AC - B^2 > 0$ болса $M(x_0,y_0)$ нүктеде экстремум бар, және егер $A<0$ – максимум, $A>0$ – минимум; ал $\Delta = AC - B^2 < 0$ болса $M(x_0,y_0)$ нүктеде экстремум жоқ; $\Delta = AC - B^2 = 0$ болса $M(x_0,y_0)$ нүктеде экстремумның бар жоқтығы белгісіз.

Екі айнымалы функцияны экстремумға мынадай ретпен зерттеген жөн:

1. Функцияның z'_x және z'_y дербес туындыларын табу;
2. $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешіп, күдікті нүктелерді табу;

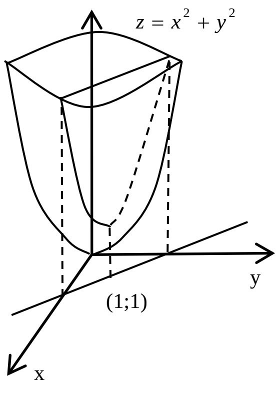
3. Функцияның екінші ретті дербес туындыларын тауып, экстремумның жеткілікті шарты бойынша экстремумның бар жоқтығын анықтау;
4. Функция экстремумдарын (экстремум нүктедегі) мәнін табу.

Шартты экстремум ұғымын қарастыруға көшейік. Екі айнымалы функция экстремумын оның бүкіл анықталу облысында емес, тек берілген шартты қанағаттандыратын жиында қарастырайық.

Айталық $z = f(x, y)$ функциясының x және y аргументтері ***байланыс теңдеуі*** деп аталатын $g(x,y) = 0$ теңдеуін қанағатандырсын.

Анықтама. ***$M(x_0,y_0)$ нүктенің жақын маңайында жатқан $g(x,y) = 0$ теңдеуін қанағатандыратын барлық (x, y) нүктелер үшін $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0,y_0)$ функцияның шартты максимум нүктесі деп, ал $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ теңсіздігі орындалса, $M(x_0,y_0)$ функцияның шартты минимум нүктесі деп аталады.***

Функцияның шартты экстремумын қарапайым жағдайларда бір айнымалы функция экстремумын табуға келтіреді.



Мысалы, $z = x^2 + y^2$ функциясының мына шартты $x + y - 2 = 0$ қанағаттандыратын экстремумын табу керек.

Шешуі. Байланыс теңдеуіндегі у айнымалыны x арқылы өрнектейік, $y = 2 - x$. Берілген функциядағы у айнымалының орнына қойсақ бір айнымалыдан тәуелді функция аламыз:

$$z = x^2 + (2 - x)^2$$

немесе $z = 2x^2 - 4x + 4$. Бұл функцияның жалғыз ғана минимум мәні бар, ол $x=1$ болғанда. Осы нүктедегі $y = 2 - x$ функцияның мәні $y = 2 - 1 = 1$. Сонымен берілген функцияның шартты экстремум нүктесі - (1,1). Функцияның шартты экстремумы $z = 1^2 + 1^2 = 2$.

Мысалдан көрініп тұрғандай функцияның шартты экстремумы (минимумы) функцияның шартсыз экстремумынан (функцияның (0,0) нүктесіндегі минимумнан) өзгеше.

Жалпы жағдайда шартты экстремумды Лагранж әдісімен табады. Енді осы әдісті қарастырайық.

Үш айнымалыдан тәуелді

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

функциясын қарастырамыз. Бұл функция ***Лагранж функциясы*** деп, λ - ***Лагранж көбейткіші*** деп аталады. Мынадай теорема дұрыс болады.

Теорема. ***Егер (x_0,y_0) нүкте $z= f(x, y)$ функциясының $g(x,y) = 0$ шартын қанағаттандыратын шартты экстремум нүктесі болса, онда қандай да бір λ_0 табылады да, (x_0, y_0, λ_0) нүкте $L(x, y, \lambda)$ функциясының экстремум нүктесі болады.***

Сонымен, $z= f(x, y)$ функциясының $g(x,y) = 0$ шартын қанағаттандыратын шартты экстремумын табу үшін мынадай жүйені шешу керек:

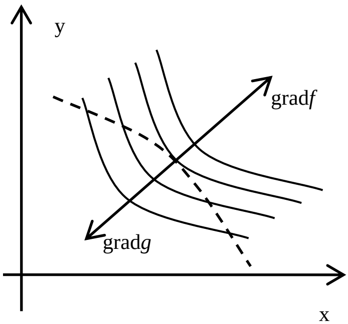
$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = g'(x,y) = 0 \end{cases}$$

Бұл жүйедегі соңғы теңдеу - байланыс теңдеуі. Ал бастапқы екі теңдеуді мынадай түрде жазуға болады:

$$\text{grad}\, f = -\lambda\, \text{grad}\, g,$$

яғни, шартты экстремум нүктесінде $f(x, y)$ және $g(x,y)$ функцияларының градиенттері коллинеар болады.

Суретте Лагранж шартының геометриялық мағнасы көрсетілген. Үзік сызықпен $g(x,y) =0$ байланыс сызығы кескінделген, ал тегіс сызықпен функцияның $f(x,y)$=C деңгейлік сызығы кескінделген. Сонда *шартты экстремум нүктесінде* *z=f(x,y) функциясының деңгейлік сызығы байланыс сызығымен жанасады.*



Енді алдыңғы мысалды $z = x^2 + y^2$ функцияның мына шартты

$$x + y - 2 = 0$$

қанағаттандыратын экстремумын Лагранж әдісімен тауып көрейік.

Шешімі. Лагранж функциясын құрамыз:

$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 2).$

Дербес туындыларын

$$L'_x = 2x + \lambda\,, \qquad L'_y = 2y + \lambda\,, \qquad L'_\lambda = x + y - 2$$

тауып, нолге теңестіріп жүйе шешеміз:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Жүйенің жалғыз шешімі бар. Осыдан берілген функцияның шартты экстремум нүктесі - (1, 1) екендігі шығады. Функцияның шартты экстремумы $z = 1^2 + 1^2 = 2$.

ТЕОРИЯЛЫҚ СҰРАҚТАР.

- Екі айнымалыдан тәуелді функцияның дербес туындыларын қалай табады?
- Толық дифференциал формуласын жаз.
- Функцияны экстремумға зерттеу ретін есіңе түсір.
- Лагранж әдісі нені есептеуге қолданылады?