Лекция 8. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. О точках разрыва монотонной функции. Свойства монотонных функции: существование обратной функции, существование односторонних пределов, монотонной на отрезке, функции. Необходимое и достаточное условие непрерывности монотонной функции, непрерывность обратной функции

Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на множестве D, если

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in D |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Функция f непрерывна на $D \Longleftrightarrow \forall x \in D f$ непрерывна в точке x. В определении непрерывности δ зависит от ε и x, в отличие от определения равномерной непрерывности, где δ зависит только от ε.

Пример. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Однако не всякая непрерывная на множестве функция равномерно непрерывна на нём. Приведём примеры.

Пример Пусть $X = (0; 1], f(x) = \frac{1}{x}$. Как элементарная, эта функция непрерывна на $(0; 1]$. Покажем, что равномерно непрерывной на $(0; 1]$ она не является.

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$, меньшее единицы. Положим $x' = \sqrt{\delta}, x'' = \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}$. Тогда $x', x'' \in (0; 1], |x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}} \right| = \frac{\delta}{2\sqrt{\delta}\left(\sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}\right)} = \frac{1}{2 - \sqrt{\delta}} > \frac{1}{2},$$

что противоречит условию из определения.

Итак, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, рассматриваемой на множестве $X = (0; 1]$, по числу $\varepsilon = \frac{1}{2}$ невозможно подобрать δ, как того требует условие равномерной непрерывности, поэтому она не является равномерно непрерывной на этом множестве.

Пример Пусть $X = [1, +\infty)$, $f(x) = x^2$.

Функция f непрерывна на X. Покажем, что равномерно непрерывной на X она не является.

Возьмём $\varepsilon = 1$ и любое $\delta > 0$. Положим $x' = \frac{1}{\delta}$, $x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Снова получаем, что по числу $\varepsilon = 1$ невозможно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие из определения, поэтому функция f не является равномерно непрерывной на множестве X.

Теорема (Кантора). Если f непреривна на компакте K, то она равномерно непрерывна на K.

☐ Доказательство. Докажем теорему двумя способами.

1) Докажем от противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in K : |x - y| < \delta \text{ и } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Положим $\delta = \dfrac{1}{n}$, $x_n, y_n \in K$, $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Так как $K-$ компакт, то $\exists x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in K$.

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Longrightarrow y_{n_k} \longrightarrow x_0$$

Из-за непрерывности $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$ и $f(y_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$.

$$0 < \varepsilon \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \longrightarrow 0$$

- противоречие.

2) Для всяких $x \in K \exists U_{\delta(x)}(x) : \omega\left(f, U_{\delta(x)}(x)\right) < \varepsilon$, т.е. $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Для всяких $x_1, x_2 \in U_{\delta(x)}(x)$ функция f непрерывна в точке x. Окрестности $U_{\delta(x)}(x)$ покрывают K, когда $x \in K$. Следовательно, существует покрытие K

$$U_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1), \ldots, U_{\frac{\delta(z_n)}{2}}(x_n)$$

$$\delta = \min\left\{ \frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_N)}{2} \right\}$$

Пусть $|x - y| < \delta$. Существует $U_{\frac{\delta(z_k)}{2}}(x_k) \ni x, \delta \le \dfrac{\delta(x_k)}{2}$, $x, y \in U_{\delta(x_k)}(x_k) \Longrightarrow$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

■

Задача

Проверить, является ли функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывной на отрезке $[0, 1]$.

Решение

Функция $f(x) = \sqrt{x}$ определена и непрерывна на $[0, 1]$, так как корень является непрерывной операцией для всех $x \ge 0$.

Для того чтобы функция была равномерно непрерывной, должно выполняться следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in [0, 1]$ из условия $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Рассмотрим разность $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$. Преобразуем это выражение:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}.$$

Чтобы исследовать равномерную непрерывность, нужно понять, можем ли мы ограничить выражение $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ при малых значениях $|x - y|$.

Заметим, что для всех $x, y \in [0, 1]$ выполняется $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{0} + \sqrt{0} = 1$. Поэтому:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le |x - y|.$$

Таким образом, если мы возьмём $\delta = \varepsilon$, то для любых $x, y \in [0, 1]$ из условия $|x - y| < \delta$ будет следовать, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Поскольку мы смогли подобрать $\delta = \varepsilon$ независимо от конкретных значений x и y, функция $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной на отрезке $[0, 1]$.

Функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,1]$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta = \varepsilon$ так, что для любых $x, y \in [0,1]$ из условия $|x-y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ■

Свойства монотонных функций

Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение Будем называть Функциию f :
a) неубъвающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$;
b) возрастающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$;
c) невозрастающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$;
d) убывающей на промежутке X, если из того, что $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение Неубываюшие, возрастаюшие, невозрастаюшие и убывающие на промежутке X Функции будем называть Функциями, монотонными на промежутке X, а возрастающие и убывающие – строго монотонными.

Пример Функция $y = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$, но не является монотонной на $\mathbb{R}$.

Пример Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$, и не является монотонной ни на каком промежутке, длина которого больше π.

Пример Функция $y = \operatorname{sgn} x$ не убывает на $\mathbb{R}$, а функция $y = x + \operatorname{sgn} x$ возрастает $\mathbb{R}$.

Пример Функция $y = [x]$ не убывает на $\mathbb{R}$.

Монотонные функции обладают рядом хороших качеств, к изучению которых мы сейчас приступим.

Теорема Функция, заданная и монотонная на промежутке $\langle a, b\rangle$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва первого рода.

□ Было доказано, что, если функция монотонна на некотором промежутке, то в любой внутренней точке этого промежутка существуют ее пределы слева и справа, причем выполнено неравенство $f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$.

Отсюда следует, что, если точка x_0 является точкой разрыва функции, то это точка разрыва первого рода, и в этой точке хотя бы одно из этих неравенств строгое. Допустим, что $f(x_0-0) < f(x_0)$ и возьмем рациональное число, лежащее на промежутке $(f(x_0-0); f(x_0))$. Так как все такие промежутки не пересекаются, то числа, соответствующие точкам разрыва, будут разные. Множество таких рациональных чисел счетно, как подмножество множества всех рациональных чисел. Следовательно, множество точек разрыва тоже будет счетно. ■

Теорема Монотонная на отрезке $[a;b]$ Функциия f в каждой внутренней точке c отрезка $[a;b]$ имеет предельные значения слева и справа, в точке a имеет правый предел и в точке b - левый предел.

□ Доказательство. Пусть функция f не убывает на $[a;b]$ и $c \in (a;b]$. Докажем, что в точке с существует левый предел функции f.

Рассмотрим множество $Y_c = \{f(x) : a \leq x < c\}$. Это множество не пусто $(f(a) \in Y_c)$ и ограничено сверху (если $x \in [a;c)$, то $f(x) \leq f(c)$). В таком случае по теореме о существовании точной верхней грани (теорема 1.1) существует $\gamma = \sup Y_c (\leq f(c))$. Покажем, что $\gamma = \lim_{x \to c-0} f(x)$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По свойствам точной верхней грани найдётся $x' \in [a;c)$ такое, что $\gamma - \varepsilon < f(x') \leq \gamma$. Положим $\delta = c - x'$. Так как $x' < c$, то $\delta = c - x' > 0$. Если теперь возьмём любое $x : c - \delta < x < c$, то имеем очевидную цепочку неравенств:

$$\gamma - \varepsilon < f(x') \leq f(x) \leq \gamma < \gamma + \varepsilon$$

из которой следует, что $|f(x) - \gamma| < \varepsilon$, если $c - \delta < x < c$. Тем самым установлено, что $\gamma = f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x)$, причём $f(c-0) \leq f(c)$. ■

Доказательство существования правого предела и доказательство существования обоих односторонних пределов для невозрастающей функции проводятся аналогично, поэтому предоставляются читателям.

Следствие Монотонная на отрезке $[a;b]$ функция может иметь на нём только точки разрыва первого рода.

□ Доказательство. Пусть c – внутренняя точка отрезка $[a;b]$. Так как в точке c оба односторонних предела существуют и конечны, она не может быть точкой разрыва второго рода. Точка c не может быть и точкой устранимого разрыва, потому что из доказательства теоремы следует, что $f(c)$ содержится между $f(c-0)$ и $f(c+0)$, поэтому, если $f(c-0) = f(c+0)$, то $f(c) = f(c-0) = f(c+0)$ и $c-$ точка непрерывности функции. Следовательно, если c – точка разрыва, то – первого рода. ■

Теорема Пусть функция f монотонна на отрезке $[a;b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Функция f непрерывна на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $f([a;b]) = [\alpha;\beta]$, другими словами, когда f принимает все промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$ значения.

□ Доказательство. Доказательство проведём для неубывающей на $[a;b]$ функции. Для невозрастающей функции доказательство проводится аналогично.

Необходимость. Пусть f непрерывна на $[a;b]$ и γ – любое, удовлетворяющее условию $\alpha < \gamma < \beta$, число. Нужно доказать существование $c \in (a;b)$ такого, что $f(c) = \gamma$.

Рассмотрим два множества: $X' = \{x \in [a;b] : f(x) \leq \gamma\}$ и $X'' = \{x \in [a;b] : f(x) > \gamma\}$. Множества X' и X'' обладают следующими свойствами.

1. $X' \bigcup X'' = [a;b]$, причём множества X' и X'' общих точек не имеют.

   Действительно, для каждой точки $x \in [a;b]$ справедливо только одно из неравенств: либо $f(x) \leq \gamma$, либо $f(x) > \gamma$.

2. Множество X' располагается левее множества X''. Это следует из предположения о неубывании функции f.

Из этих двух свойств вытекает, что правая граница $\sup X'$ множества X' совпадает с левой границей $\inf X''$ множества X''. Обозначим общую границу множеств X' и X'' буквой и покажем, что $f(c) = \gamma$.

По предыдущей теореме в точке c определены левый $f(c-0)$ и правый $f(c+0)$ пределы. Так как при $x < c$ справедливо $f(x) \leq \gamma$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве $f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x) \leq \gamma$. Рассуждая аналогично, найдём, что $f(c+0) \geq \gamma$. Итак, $f(c-0) \leq \gamma \leq f(c+0)$. Но по условию функция f непрерывна в точке c, поэтому $f(c-0) = f(c+0) = f(c)$. Сравнивая эти два условия, получаем, что $f(c) = \gamma$.

Достаточность. Предположим, что функция f не убывает на $[a;b]$, принимает все промежуточные между $f(a) = \alpha$ и $f(b) = \beta$ значения, но не является непрерывной на $[a;b]$. Тогда найдётся точка разрыва c функции f.

Если c – внутренняя точка $[a;b]$, то по следствию из предыдущей теоремы она является точкой разрыва первого рода, следовательно, $f(c-0) < f(c+0)$. Так как $f(c)$ находится между левым и правым пределами, то либо

$$f(c-0) < f(c),$$

либо

$$f(c) < f(c+0).$$

Допустим первое. В таком случае функция f не может принимать значений, расположенных между $f(c-0)$ и $f(c)$, потому что если $x < c$, то $f(x) \leq f(c-0)$, а если $x > c$, то $f(x) \geq f(c)$.

Если $c = a$, то $f(a) < f(a+0)$ (в противном случае функция была бы непрерывна в точке a). Так как $f(x) \geq f(a+0)$ при $x > a$, то функция f не может принимать значений, расположенных между $f(a)$ и $f(a+0)$.

Если $c = b$, то функция f не может принимать значений, расположенных между $f(b-0)$ и $f(b)$.

Таким образом, предположение о наличии у функции f точки разрыва привело к противоречию с условием теоремы. ■

Теорема об обратной функции

Теорема (об обратной функции). Пусть $I \neq \varnothing -$ промежуток. Функция $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная, строго монотонная. Тогда
1) $f(I) = J$.

2) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ - биекция

3) $f^{-1} : J \longrightarrow I-$ строго монотонная (имеет тажую же монотонность, и, как и f, непрерывная.

$\square$ Дожазательство. Достаточно поверить, что f^{-1} строго монотонна. Пусть f возрастает и $y_1 < y_2$.

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \vee f^{-1}(y_2) = x_2,$$
$$x_1 \neq x_2,$$
$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1) - \text{ противоречие},$$
$$\Longrightarrow f(x_2) < f(x_1), \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow$$
$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Следовательно, f^{-1} возрастает. $\blacksquare$

Пример На множестве $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ рассмотрим Функциию $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$ и покажем, что она имеет обратную.

Решение. Сначала рассмотрим функцию $f(x) = x^n$ на отрезке $[0; a]$, где $a > 0$ - любое. На данном отрезке функция f непрерывна и возрастает, поскольку если $x_2 > x_1 \geq 0$, то $x_2^2 = x_2 \cdot x_2 > x_1 \cdot x_1 = x_1^2$ и далее по индукции. Так как функция $f : [0; a] \to [0; a^n]$ удовлетворяет условиям последней теоремы, то она имеет обратную $f^{-1} : [0; a^n] \to [0; a]$, непрерывную и возрастающую на $[0; a^n]$.

Если $a \to +\infty$, то и $a^n \to +\infty$, поэтому функция f^{-1} определена, непрерывна и возрастает на $[0; +\infty)$.

Функцию f^{-1} записывают в виде $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ и называют арифметическим корнем n-й степени из числа x.